

Examen *Processus stochastiques et produits dérivés*

Master 2 *Probabilités et Finance* UPMC-X

Sans document, ni calculatrice, ni téléphone.

E. Gobet

7 janvier 2020 – 16h30 à 19h30

Les notations sont celles du cours.

Les trois exercices sont indépendants. Il est demandé de justifier ses réponses avec soin et clarté ; la notation en tiendra compte. Le barème sur 20 points est indicatif.

On rappelle la formule de Black-Scholes pour un Call, avec le taux sans risque r et la volatilité σ :

$$\text{Call}^{\text{BS}}(t, S, T, K, \sigma, r) = S \mathcal{N}(d^+) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d^-),$$

avec $d^+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{S}{K e^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$, $d^- = d^+ - \sigma\sqrt{T-t}$,

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite.

Exercice 1 - Marché des zéro-coupons (6 points)

On considère un marché arbitré de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, où le taux d'intérêt r_t est supposé stochastique adapté à une filtration du marché $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ et où W représente un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien unidimensionnel.

Comme dans le cours, on note $B(t, T)$ la valeur d'un zéro-coupon en t de maturité T , les taux court forward sont donnés par $f(t, T) := -\partial_T[\ln B(t, T)]$ et $r_t = f(t, t)$.

1ère question : modèle HJM et zéro-coupons. Nous partons d'une dynamique des taux forward et cherchons à remonter à la dynamique des zéro-coupons. On suppose que le taux court forward évolue comme

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds - \int_0^t \gamma(s, T) dW_s,$$

où $t \mapsto \alpha(t, T)$ et $t \mapsto \gamma(t, T)$ sont des processus stochastiques adaptés assurant l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation précédente. On pose

$$\Gamma(t, T) := \int_t^T \gamma(t, u) du.$$

(Q1-a) Justifier que $X_t = -\ln B(t, T)$ avec $X_t := \int_t^T f(t, u) du$.

(Q1-b) De la dynamique de $\{f(\cdot, u) : t \leq u \leq T\}$, écrire la dynamique d'Itô de X_t et en déduire celle de $B(t, T) = e^{-X_t}$. Vérifier que la volatilité de $B(\cdot, T)$ est égale à $\Gamma(\cdot, T)$.

Indication : on admettra les règles de Fubini généralisées pour intervertir les intégrales en dt et dW_t .

(Q1-c) Pour que la dynamique des zéro-coupons soit compatible avec les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage, montrer qu'on doit avoir

$$\alpha(t, T) = \gamma(t, T)\Gamma(t, T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dans la suite, on suppose cette condition satisfaite.

(Q1-d) Définir une probabilité sous laquelle $f(\cdot, T)$ martingale.

2ème question : modèle de Ho-Lee et pricing. Nous restons dans le cadre précédent mais nous supposons en plus que r suit un modèle de type Ho-Lee

$$r_t = r_0 + A_t - \sigma W_t,$$

pour une certaine fonction déterministe A et un certain paramètre $\sigma > 0$. Pour éviter la redondance avec r_0 , on impose $A_0 = 0$.

(Q2-a) Identifier la loi de $\int_t^T r_s ds$ conditionnellement à $\mathcal{F}_t$. On calculera explicitement sa variance.

Indication : l'intégration par partie de tW_t vue en TD peut s'avérer utile.

En déduire un calcul explicite de $B(t, T)$. Quelles sont les volatilités $\Gamma(s, T), \gamma(s, T)$ de ce modèle ?

(Q2-b) Déterminer la condition que doit satisfaire la fonction A pour que ce modèle soit calibré sur la courbe des taux aujourd'hui (donnée par $B(0, T), T \geq 0$, et r_0).

(Q2-c) **Question importante.** On s'intéresse à un calendar spread sur zéro-coupons, dont le payoff est $(B(T, T_2) - KB(T, T_1))_+$ à la date T (avec $T < T_1 < T_2$). Calculer le prix π_t du contrat en tout temps $t \leq T$. Donner une couverture

- avec $B(\cdot, T_1)$ et $B(\cdot, T_2)$ seulement,
- avec $B(\cdot, T_2)$ et du cash seulement.



Exercice 2 - Option activée à la hausse (8 points)

L'objectif est de valoriser certaines options, activées lorsque l'actif risqué sous-jacent a atteint un niveau haut H . Nous supposons que l'actif risqué $S = (S_t)_t$ a pour dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \quad S_0 > 0$$

sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, $r \geq 0$ est le rendement de l'actif sans risque, et W un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien. Nous étudions trois options correspondant aux payoffs suivants :

1. $\Psi_1 = \mathbf{1}_{S_T \geq H} S_T$ reçu à l'échéance T ,
2. $\Psi_2 = \mathbf{1}_{\tau_H \leq T} S_T$ reçu à l'échéance T , où

$$\tau_H = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq H\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$),

3. $\Psi_3 = \mathbf{1}_{\tau_H \leq T} (S_{T+\theta} - S_T)_+$ reçu à l'échéance $T + \theta$.

1ère question. Nous considérons la première option de payoff Ψ_1 .

(Q1-a) Calculer explicitement son prix V_t^1 à la date t et la couverture associée, en fonction de S_t , H , σ , $T - t$ et r .

(Q1-b) Calculer le prix de l'option barrière de payoff $\mathbf{1}_{\tau_H \leq T} \Psi_1$.

2ème question. Dans cette question, nous considérons le second payoff Ψ_2 . Le prix de l'option sera noté V_t^2 .

(Q2-a) Quels sont le prix et la couverture de l'option à la date 0 si $S_0 \geq H$?

Nous supposons dans la suite $S_0 \leq H$.

(Q2-b) Définir la probabilité $\overline{\mathbb{Q}}$ équivalente $\mathbb{Q}$ telle qu'on ait :

$$V_0^2 = V_0^1 + S_0 \overline{\mathbb{Q}}(\tau_H \leq T, S_T < H).$$

Écrire la relation entre W et le nouveau brownien $\overline{W}$ sous $\overline{\mathbb{Q}}$. Expliciter $\tilde{r}$ tel que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \tilde{r}dt + \sigma d\overline{W}_t.$$

(Q2-c) On pose $\gamma = -(1 + \frac{2r}{\sigma^2})$: **on notera que γ est négatif**. Justifier que $M_t = S_t^\gamma$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$ -martingale log-normale. Donner sa volatilité σ_M .

(Q2-d) On pose $D = H^\gamma$ (on remarquera que $D \leq M_0$) et $\tau_D^M = \inf\{t \geq 0 : M_t \leq D\}$. Montrer que

$$\overline{\mathbb{Q}}(\tau_H \leq T, S_T < H) = -\partial_k \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{1}_{\tau_D^M \leq T} (M_T - k)_+) |_{k=D}.$$

(Q2-e) Admettons pour l'instant la relation :

$$\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{1}_{\tau_D^M \leq T} (M_T - k)_+) = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{1}_{\tau_D^M \leq T} (D - \frac{k}{D} M_T)_+). \quad (1)$$

Prouver alors que

$$\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{1}_{\tau_D^M \leq T} (M_T - k)_+) = \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}}(D - \frac{k}{D} M_T)_+ \quad \text{pour } k \geq D.$$

(Q2-f) En déduire la valeur explicite de V_0^2 en fonction de V_0^1 , S_0 , H , σ , T et r .

(Q2-g) Justifions maintenant la relation (1). Définissons une nouvelle probabilité $\widehat{\mathbb{Q}}$ par $\widehat{\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}_T} = Z_T \overline{\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}_T}$ où $Z_T = \frac{M_T}{M_0}$. Justifier que la loi de $(\frac{M_0}{M_t})_t$ sous $\widehat{\mathbb{Q}}$ a même loi que $(\frac{M_t}{M_0})_t$ sous $\overline{\mathbb{Q}}$. Conclure.

3ème question. Nous étudions maintenant l'option avec cliquet de payoff

$$\Psi_3 = \mathbf{1}_{\tau_H \leq T} (S_{T+\theta} - S_T)_+$$

reçu à l'échéance $T + \theta$.

(Q3-a) Calculer explicitement le prix V_T^3 du contrat à la date T .

(Q3-b) Déduire des questions précédentes, le prix V_t^3 du contrat à toute date intermédiaire $t \in [0, T]$.



Exercice 3 - Dividende discret : couverture d'un call avec des contrats Futures (6 points)

On considère un indice qui verse un dividende à une date t_d , dont le montant dépend (de manière affine) du cours sous la forme

$$D(x) := px - q(x - \bar{S})_+, = \begin{cases} px & \text{si } x \leq \bar{S}, \\ (p - q)x + q\bar{S} & \text{si } x \geq \bar{S}, \end{cases}$$

avec $0 < q < p < 1$: typiquement $p = 5\%$, $p - q = 4\%$, le dividende est proportionnellement plus important pour les cours bas (en dessous d'un certain seuil $\bar{S} > 0$).

On distingue deux indices :

- l'indice "total return" : son cours est calculé en réinvestissant le dividende versé. Son cours est noté Y et nous supposons qu'il suit la dynamique (risque-neutre)

$$Y_t = Y_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right),$$

avec un mouvement brownien W sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$. Ici le taux d'intérêt est constant égal à r .

- l'indice simple : son cours est calculé en enlevant le dividende versé à la date t_d . Son cours est noté S , il coïncide avec Y avant le dividende, chute de $D(Y)$ au moment du dividende, puis évolue proportionnellement à Y après le dividende. En résumé, cela s'écrit :

$$S_t = \begin{cases} Y_t & \text{si } t < t_d, \\ [Y_{t_d} - D(Y_{t_d})] \frac{Y_t}{Y_{t_d}} & \text{si } t \geq t_d. \end{cases}$$

Dans cet exercice on considère un call sur Y , de payoff $(Y_T - K)_+$ à la date $T > t_d > 0$ mais pour la couverture, nous souhaitons utiliser le Future sur S de maturité T .

- (Q1) On note $\text{Fut}_t := \text{Fut}_t(S_T, T)$ le cours du Future à la date t , pour avoir S_T à la maturité T . Si V_t est un portefeuille autofinancé avec un nombre δ_t^F de Futures à la date t , écrire la dynamique de V_t .
- (Q2) Après avoir justifié brièvement pourquoi $\text{Fut}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T | \mathcal{F}_t)$, donner une formule explicite pour Fut_t . On distinguera les cas $t > t_d$, $t = t_d$, $t < t_d$ et on exprimera les résultats en fonction de Y .
- (Q3) Pour $t \neq t_d$, calculer le delta et gamma de Fut_t par rapport à Y_t , qu'on notera $\Delta_t^F = \partial_{Y_t} \text{Fut}_t$ et $\Gamma_t^F = \partial_{Y_t}^2 \text{Fut}_t$. On distinguera les cas $t > t_d$ et $t < t_d$.
- (Q4) En déduire la valeur δ_t^F pour couvrir le call de payoff $(Y_T - K)_+$.
- (Q5) On souhaite maintenant couvrir avec Y et le Future. Écrire l'équation d'autofinancement en fonction des quantités correspondantes δ^Y et δ^F . Quelle relation doivent satisfaire δ_t^Y et δ_t^F pour garantir la couverture du call ? Comment les fixer pour être Delta et Gamma neutres ?

