

Calibration de modèles HJM factoriels



Objectif

L'objectif principal de ce T.P. est de se confronter aux données réelles et aux difficultés rencontrées lors de l'étape de calibration de modèles.

Cette illustration se fondera sur les modèles de Heath-Jarrow-Morton (HJM) à un et deux facteurs gaussiens.

Les participants devront calculer des rendements de prix de commodités énergétiques et des volatilités empiriques et trouver les paramètres des modèles qui reproduisent ces caractéristiques.

Le T.P. se fait sous Excel

Données du problème et hypothèses de modèle

On dispose de données de prix de produits forward sur des marchés du pétrole, du gaz et du charbon.

On considère, dans un premier temps, un modèle HJM à un facteur de volatilité constante :

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma dW_t$$

Avec $F(t, T)$ le prix forward coté à la date t pour livraison d'1MWh à la date T .

L'objectif de calibration, dans cette première étape, est d'estimer le paramètre σ du modèle à partir de données observées de prix de marché.

Calcul de volatilités empiriques

1. Ouvrir le fichier « Calibration.xls »
2. Coller les données du marché pétrole de la feuille « Data FuelOil » dans la feuille « Data ».

Tous les calculs de la suite se font à partir de la feuille « Data ». De ce fait, on pourra analyser facilement les résultats sur les données de gaz et de charbon en collant les données correspondantes dans la feuille « Data »

3. Calculer, dans la feuille « Return », les rendements de prix. **On fera attention à gérer les dates de changement de produits** en affichant « NAN » à la place du rendement le cas échéant.
4. Dans la feuille « Estimation sur Volatilités », remplir la ligne 2 « Vol empiriques » en y calculant les volatilités annuelles de chaque type de produit.
5. En déduire un estimateur de σ et conclure sur sa stabilité en fonction des produits considérés

Calibration du modèle à deux facteurs

On considère maintenant un modèle HJM à deux facteurs défini par :

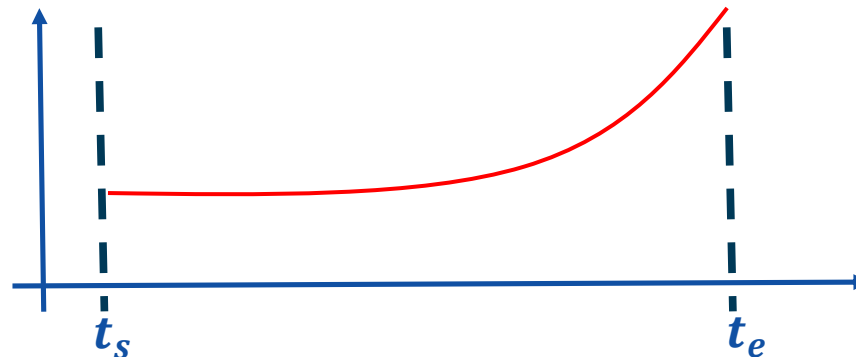
$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma_s e^{-\alpha(T-t)} dW_t^s + \sigma_l dW_t^l$$

Avec $F(t, T)$ le prix forward coté à la date t pour livraison d'1MWh à la date T .

Pour simplifier, on considère une corrélation nulle entre les mouvements browniens W_t^s et W_t^l .

Ce modèle représente une volatilité non constante, qui augmente quand la maturité diminue. Plus précisément, la volatilité équivalente est donnée par :

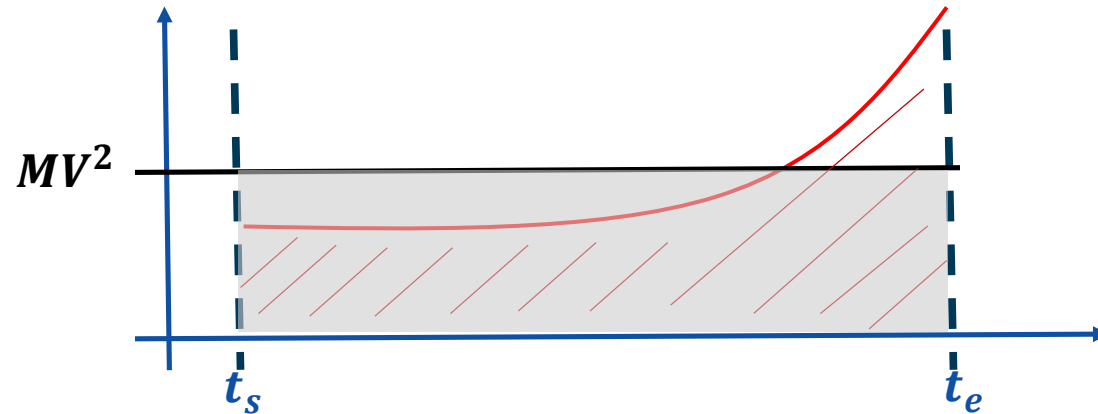
$$\sigma_{eq}^2(t, T) = \sigma_l^2 + \sigma_s^2 e^{-2\alpha(T-t)}$$



Calibration du modèle à deux facteurs

La volatilité marginale entre les dates t_s et t_e est la volatilité moyenne du prix entre ces dates

$$\begin{aligned} MV^2(t_s, t_e, T, \sigma_s, \alpha, \sigma_l) &= \frac{1}{t_e - t_s} \int_{t_s}^{t_e} \sigma_{eq}^2(t, T) dt \\ &= \sigma_l^2 + \frac{\sigma_s^2}{2\alpha(t_e - t_s)} (e^{-2\alpha(T-t_e)} - e^{-2\alpha(T-t_s)}) \end{aligned}$$



La volatilité marginale est la volatilité constante qui permet d'égaliser les aires grises hachurées rouges

Calibration du modèle à deux facteurs

6. Dans la feuille « Maturity », calculer les maturité $T - t$ en fonction des produits observés et des date t d'observation
7. A partir de la feuille « Maturity » remplie, calculer, pour chaque produit, les maturités minimum $M_s = T - t_s$ et maximum $M_e = T - t_e$ et traduire ces valeurs dans la formule de volatilité marginale.
8. Dans la feuille « Estimation sur Volatilités », remplir la ligne 3 : « Vol marginale » par le calcul des volatilités marginales $\sqrt{MV^2}$ pour chaque produit. On prendra comme valeur de paramètres celles disponibles aux cases B6, B7 et B8

Calibration du modèle à deux facteurs

Quand on calcule la volatilité empirique, on fait l'hypothèse d'une volatilité constante au cours du temps. De ce fait, c'est la volatilité empirique est une estimation de la volatilité marginale. La calibration du modèle par la méthode des moments consiste alors à trouver les paramètres du modèle qui font coller la volatilité marginale à la volatilité empirique.

9. Afficher dans un même graphe les courbes de volatilités empiriques et marginales

10. Ajuster manuellement les valeurs des paramètres du modèle de manière à faire coller les deux courbes de volatilité. En déduire le rôle de chacun des paramètres.

Calibration du modèle à deux facteurs

11. Mettre en œuvre la calibration par la méthode des moments, c'est-à-dire la minimisation :

$$(\hat{\sigma}_s, \alpha, \hat{\sigma}_l) = \underset{(\sigma_s, \alpha, \sigma_l)}{\operatorname{argmin}} \sum_T \left(MV(t_s, t_e, T, \sigma_s, \alpha, \sigma_l) - Vol_{emp}(T) \right)^2$$

On pourra utiliser le solveur d'Excel : activable dans « options Excel » → « Compléments » → « Atteindre » puis cocher la case « Complément Solveur », le solveur est alors accessible dans l'onglet « Données »

12. On pourra refaire l'analyse sur les marchés gaz et charbon en changeant les données dans la feuille « Data »