



DU. Financial
Engineering



Modélisation des prix d'énergie

Olivier Féron

1. Approche financière

1.1 Modèle de Schwartz, l'approche convenience yield

1.2 Modèle de Gibson-Schwartz

1.3 Modèles Heath-Jarrow-Morton

2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

3. Modélisation des prix de l'électricité

Besoins en modèles de prix

- ▶ **Horizon court terme** (1 jour → quelques semaines)
 - ▶ prévision de prix (en valeur, en loi...)
- ▶ **Compréhension des prix de marché**
- ▶ **Horizon moyen terme** (quelques semaines → 3 à 5 ans)
 - ▶ Prévision de gains (marge brute d'exploitation)
 - ▶ Mesure de risque
 - ▶ Couverture / réduction des risques
- ▶ **Valorisation**
 - ▶ Valorisation de produits dérivés
 - ▶ Valorisation de flexibilités (optionnalités) dans un contrat de fourniture
- ▶ **Horizon long terme** (5 ans → 100 ans)
 - ▶ Décision d'investissement
 - ▶ Étude d'impact d'investissements sur les prix

- ▶ **Trading** (horizon court terme)
 - ▶ Les prix de marché changent continûment. Est-il possible d'anticiper ces mouvements pour statistiquement battre le marché ?
- ▶ **Gestion de production** (horizons court et moyen terme)
 - ▶ Besoin constant d'arbitrer entre utiliser ses propres moyens de production et faire des échanges sur les marchés
 - ▶ Journalier : démarrer un moyen de production ou acheter sur le marché ? Jusqu'à quel prix offrir au marché spot ou en intraday ?
 - ▶ Arbitrage temporel : doit-on acheter / vendre immédiatement ou attendre pour bénéficier de gains plus élevés dans le futur ?
 - ▶ Arbitrage géographique : sur quel marché doit-on proposer sa production ?

- ▶ **Gestion de risques financiers** (horizon moyen terme)
 - ▶ Les variations de prix créent de l'incertitude sur les flux financiers (*cash-flows*)
 - ▶ Quelles variations de prix sont acceptables / tolérables ?
- ▶ **Marketing** (horizon moyen terme)
 - ▶ À quel prix vendre sa production à des clients finals ?
 - ▶ Quels produits / optionalités doit-on proposer (vendre) aux consommateurs ? aux gros consommateurs ? Ex. : est-il mieux de vendre des produits moins chers, mais avec des clauses d'annulation, ou plus chers sans clause ?
- ▶ **Décision / Choix d'investissement**
 - ▶ La valeur d'un investissement dépend de l'équilibre long terme et des prix des marchés...
 - ▶ ... mais l'évolution des prix de marché dépend des investissements !

Comment choisir le meilleur modèle?

► Besoins en pratique

- Le modèle doit reproduire les caractéristiques principales des prix
- Le modèle doit être suffisamment simple et "calibrable" pour être utilisé en pratique

► Deux sources principales d'information sur les prix

- Les **données observées** (leur valeur, leur comportement...)
- L'**expertise** (la connaissance métier de construction du prix)

Tous les modèles sont faux!!

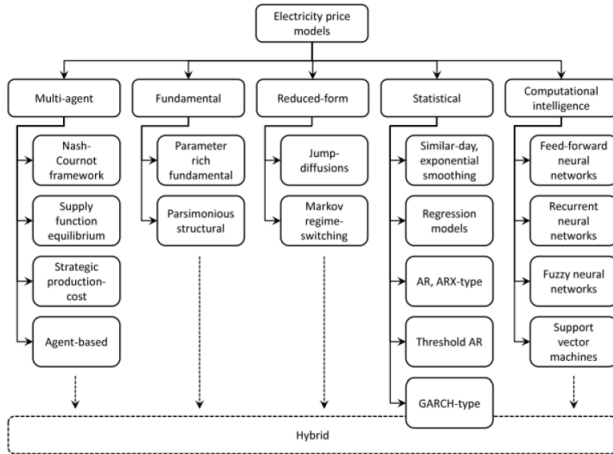
- Le choix du modèle (ou au moins de la classe de modèles) est principalement guidé par l'application visée.
 - Pourquoi a-t-on besoin d'un modèle?
 - Quelles contraintes cela entraîne sur la modélisation?
- Un contexte applicatif particulier : la finance
 - Entraîne des contraintes spécifiques pour la modélisation
 - Nécessite la modélisation des prix à terme de combustible

Tell me what you
want to do with
the model and I
tell you which one
is the best

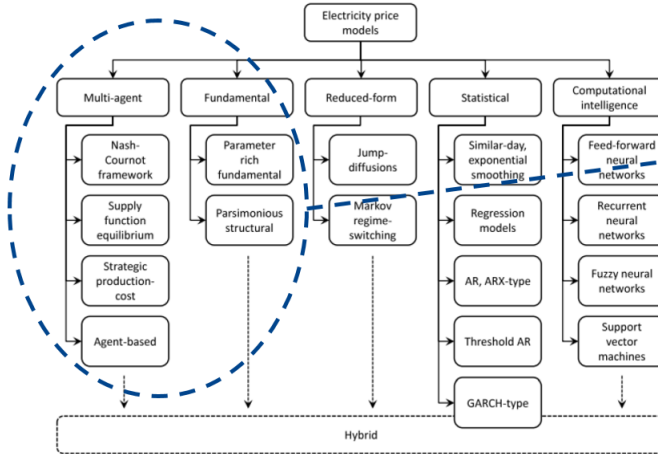
I want to do all
with the same
model



Panorama des approches de modélisation des prix (1/4)



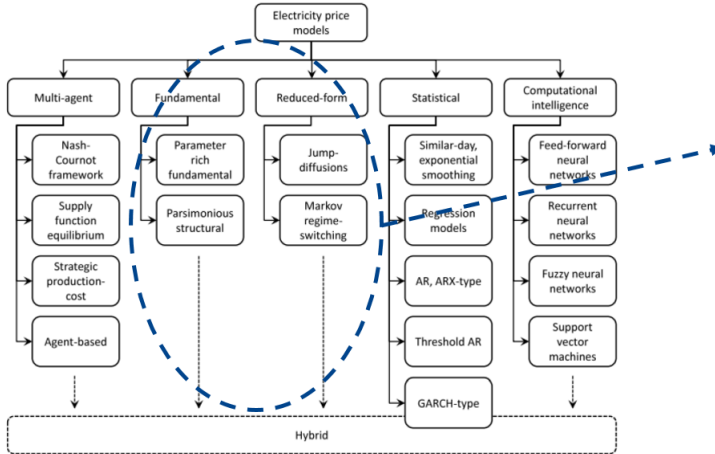
Panorama des approches de modélisation des prix (2/4)



Applications :

- ▶ Étude économique de long terme
- ▶ Stratégies d'investissement

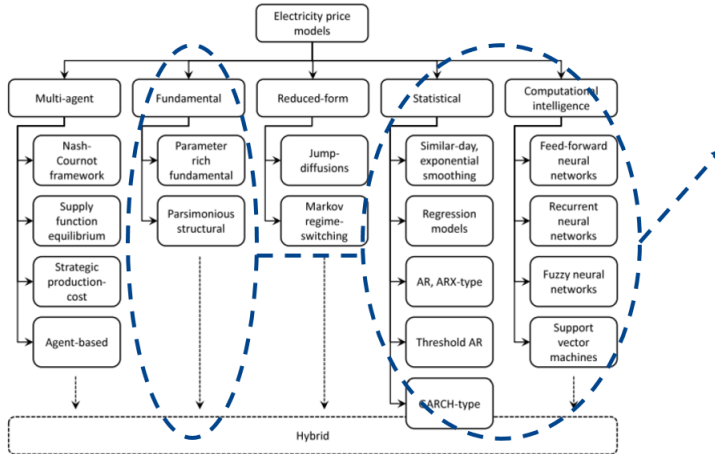
Panorama des approches de modélisation des prix (3/4)



Applications :

- Gestion des risques
- Valorisation de contrats

Panorama des approches de modélisation des prix (4/4)



Applications :

- ▶ Prédiction court terme
- ▶ Compréhension des prix

Approches pour modéliser les prix

► Approche financière

- Point de départ : l'application visée (valorisation financière et couverture)
- Compétences : processus en temps continu, calcul stochastique, contrôle stochastique

► Approche statistique / économétrie

- Point de départ : les données observées (suite de valeurs indicées par le temps)
- Compétences : statistiques, séries temporelles

► Approche structurelle / fondamentale

- Point de départ : l'expertise sur la construction (physique) du prix
- Compétences : économie des marchés, ingénierie des systèmes de production, optimisation

► Approche "Modèle d'équilibre"

- Point de départ : comportement des acteurs, concurrence
- Compétences : théorie des jeux, optimisation multi-niveaux

► Approche "Intelligence artificielle"

- Point de départ : les données et les sorties d'intérêt
- Compétences : Intelligence artificielle, réseau de neurones

► Approche financière

- Champ d'application : valorisation financière, couverture et gestion des risques (horizon moyen terme)

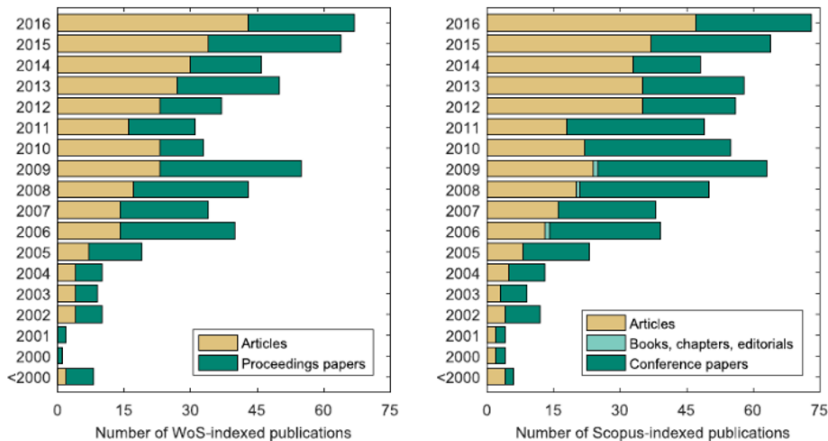
► Approche statistique/économétrique

- Champ d'application : prévision court terme, trading, mesure de risque tout horizon

► Approche structurelle / fondamentale

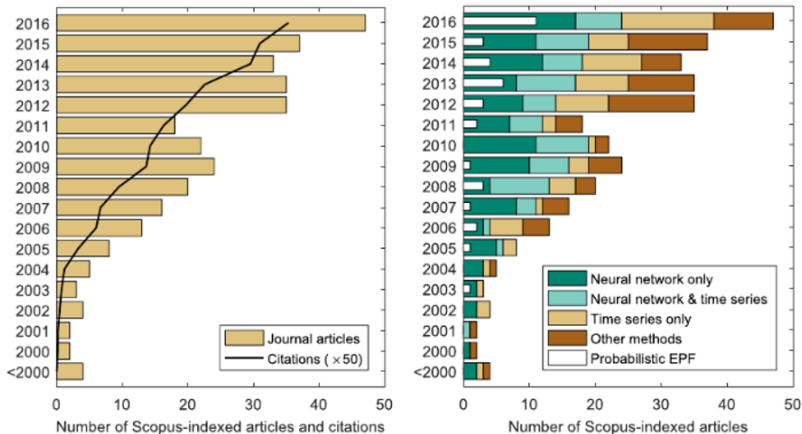
- Champ d'application : décision d'investissement (horizon long terme), prévision court terme.

Prévision de prix : revue de bibliographie (1/2)



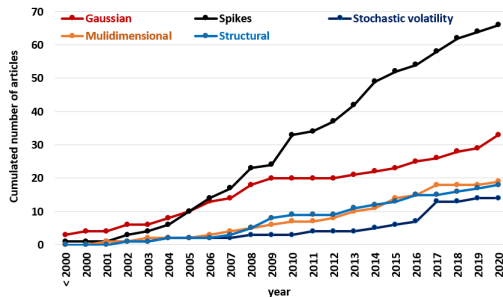
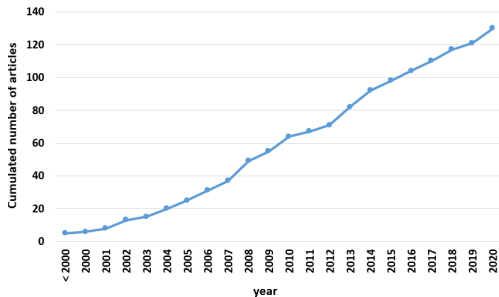
source : [Weron, 2014]

Prévision de prix : revue de bibliographie (2/2)



source : [Nowotarski and Weron, 2018]

Modèles pour la gestion des risques : revue de bibliographie



source : [Deschatre et al., 2021]

Quelques actifs exposés sur les marchés énergétiques

► Moyens de production

- Approximation : Panier d'options européennes sur spread de payoff $CF(t)$

$$CF(t) = \left(S_t^{power} - hS_t^{fuel} - h'S_t^{CO2} - K \right)^+ \quad \forall t \in [0 ; T]$$

- Plus réaliste : contraintes dynamiques
 - Coûts de démarrage, nombre limité de démarrages
 - Arrêts pour maintenance, puissance minimale

► Actifs de stockage gaz, centrales hydrauliques

- Options Swing : donne le droit d'acheter une quantité flexible $Q \in [Q_{min} ; Q_{max}]$
- Contraintes additionnelles : quantités minimales et maximales par jour, sur la totalité du contrat...

► Contrats de fourniture

- Prix indexés : moving average options
- Flexibilité dans la quantité : options swing

Monographies

- ▶ Fred E. Benth, Jurate S. Benth & Steen Koekebakker, *Stochastic Modeling of Electricity and Related Markets*, World Scientific, 2008.
- ▶ Hélyette Geman, *Commodities and Commodity Derivatives : Modelling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy*, Wiley, 2005.
- ▶ Alexander Eydeland & Krzysztof Wolyniec, *Energy and Power Risk Management : New Developments in Modeling, Pricing and Hedging*, Wiley, 2002.
- ▶ Les Clewlow & Chris Strickland, *Energy Derivatives : Pricing and Risk Management*, Lacima Group, 2000.

1. Approche financière

2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

- ▶ **Point de départ : l'application**
- ▶ **Gestion des risques**
 - ▶ Définir le prix de contrats spécifiques
 - ▶ Mesurer les risques financiers de la marge brute énergie (MBE)
 - ▶ Définir la stratégie de couverture pour réduire (annuler dans l'idéal) les risques
- ▶ **L'objectif final n'est pas de modéliser les prix, mais les flux financiers (cash-flows)**
- ▶ **Outils essentiels : processus stochastiques, calcul et contrôle stochastiques**
 - ▶ L'objectif est d'avoir des modèles suffisamment simples pour calculer les cash-flows et les couvertures optimales...
 - ▶ ... mais assez réalistes pour représenter les principales caractéristiques des risques
 - ▶ Nous verrons dans la suite que, en théorie, il n'est pas nécessaire de bien représenter certaines caractéristiques des risques si la stratégie de couverture permet de rendre les cash flows insensibles à celles-ci.

Actifs classiques exposés aux marchés de l'énergie

► Centrales de production

- Première approximation : panier d'**options européennes** de payoff $CF(t)$

$$CF(t) = \left(S_t^{power} - hS_t^{fuel} - h'S_t^{CO2} - K \right)^+, \quad t \in [0 ; T]$$

- Plus réaliste : contraintes dynamiques, coût de démarrage et d'arrêt...

► Actifs de stockage gaz, barrages hydrauliques

- **Options swing** : donne le droit d'acheter ou de vendre une quantité flexible du bien considéré
- Contraintes additionnelles : quantités minimales et maximales globales, par unité de temps...

► Contrat de fourniture

- Au tarif indexé (ex : contrat de gaz) : **Option à moyenne mobile**
- Quantité de consommation flexible : **Options swing**

► Avantages

- Spécialement dédié à la gestion des risques (valorisation et couverture)
- Permet de trouver des arbitrages financiers
- Permet de modéliser les prix spot et forward de manière cohérente

► Inconvénients

- Les modèles sont généralement trop pauvres pour bien représenter les prix
- L'approche nécessite des bases solides en mathématiques financières

Modélisation financière et gestion des risques sont liées

- ▶ **Il est difficile de présenter la modélisation financière sans donner des éléments clés de la théorie financière**
 - ▶ Les bases de la finance doivent être connues pour bien comprendre les choix de modélisation
 - ▶ La modélisation financière utilise des processus en temps continu et du calcul stochastique, qui sont des objets mathématiques complexes
- ▶ **Généralement, la gestion des risques fait l'objet d'une formation complète**
- ▶ **Objectifs de cette partie**
 - ▶ Donner le minimum de bagage en théorie de la finance
 - ▶ Donner quelques formules clés sans entrer dans les détails
 - ▶ Se focaliser sur des illustrations de couverture pour montrer la pertinence de l'approche

Rappel de valorisation financière : 2 principales hypothèses

► Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

- Il est impossible de faire un profit supérieur au taux sans risque, sans avoir d'incertitude
- En pratique, ces possibilités peuvent exister temporairement, mais disparaissent rapidement à cause de la présence d'arbitrageurs de marché

► Marché complet

- Tous les produits sont disponibles sur le marché...
- ...à tous les temps...
- ... en quantité illimité (à l'achat et à la vente)...
- ... sans impact sur les prix

► La couverture optimale théorique est la couverture en Delta (sensibilité du prix de l'option par rapport au prix de l'actif risqué)

- ▶ **La probabilité risque neutre (existence et unicité) est une conséquence des deux hypothèses principales d'AOA et de marché complet**
 - ▶ C'est un outil mathématique qui permet d'accéder facilement à la valeur de l'option et à la stratégie de couverture optimale
 - ▶ Sous la probabilité risque neutre, les rendements moyens des actifs risqués sont tous égaux au rendement sans risque
- ▶ **Si l'objectif est de valoriser ou couvrir un portefeuille,**
 - ▶ Le modèle doit être simulé sous la probabilité risque neutre
 - ▶ Par conséquent, les prix simulés ne sont pas réalistes (au moins certaines caractéristiques ne sont pas bien représentées)
 - ▶ Cependant, il doit bien représenter la volatilité

Modèle conjoint prix spot / prix à terme : motivations

- ▶ **Le risque porté par les actifs (financiers ou physiques) est principalement le prix spot**
- ▶ **Du fait de sa non-stockabilité, l'électricité n'est pas un actif financier**
 - ▶ On ne peut pas acheter de l'électricité pour la vendre plus tard
 - ▶ Il ne peut donc pas servir pour la couverture des risques
- ▶ **Conséquence** : Les contrats à terme sont les seuls actifs de couverture sur les marchés de l'énergie
- ▶ **Il est donc indispensable de disposer d'un modèle représentant conjointement les prix spot et les prix forward, de manière cohérente**

Relation entre les prix spot et les contrats à terme

► Notations

- S_t : prix spot coté à la date t
- $F(t, T, \theta)$: contrat à terme coté à la date t , livrant 1MWh d'énergie pour toutes les heures entre T et $T + \theta$.

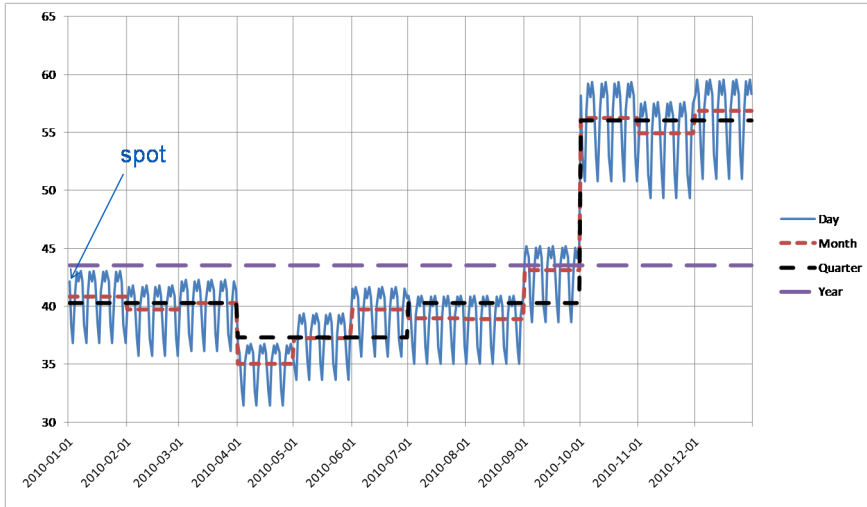
► Lien clé : courbe de prix à terme unitaire (courbe à terme)

- prix à terme unitaire : $F(t, T) = F(t, T, 1h)$: prix à terme coté à la date t , livrant 1MWh d'énergie à la maturité T .
- courbe à terme $(F(t, T))_{T \geq t}$

► prix observés en fonction des contrats unitaires

- prix spot à la limite : $S_t = F(t, t)$
- contrats à terme par Absence d'opportunité d'arbitrage : $F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_T^{T+\theta} F(t, s) ds$

Exemple



Modélisation des prix d'électricité : deux stratégies

► Première stratégie : la courbe à terme unitaire comme point de départ

$$dF(t, T) = \mu(t, T, F(t, T))dt + \sigma(t, T, F(t, T))dW_t$$

- prix spot déduit comme la limite $S_t = \lim_{T \rightarrow t} F(t, T)$
- contrats à terme déduits par absence d'opportunité d'arbitrage

$$F(t, T, \theta) = \int_0^\theta w(u)F(t, T + u)du$$

► Deuxième stratégie : le prix spot comme point de départ

$$dS_t = \mu(t, S_t, X_t)dt + \sigma(t, S_t, X_t)dW_t$$

- D'autres variables (processus stochastiques) X_t (combustibles, demande, toute variable explicative du prix) peuvent être prises en compte.
- Les contrats à terme se déduisent par absence d'opportunité d'arbitrage

$$F(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [S_T]$$

Exclusivement fondée sur les modèles de taux d'intérêt

- ▶ **Modèle classique (simple) de Vasicek**
 - ▶ Taux instantané $\Leftrightarrow$ Prix spot
- ▶ **Modèles de type Heath-Jarrow-Morton (HJM)**
 - ▶ Donne la dynamique globale des prix à terme.
 - ▶ Utilise les contrats observés comme condition initiale à la diffusion.

Remarques

- ▶ $\oplus$ Relation cohérente entre les prix spot et les prix à terme (par construction)
- ▶ $\oplus$ Idéal pour la valorisation financière, la couverture et la mesure de risque dans le cadre commun des acteurs de marché
- ▶ $\oplus \Rightarrow$ Approche préférée des départements opérationnels.
- ▶ $\ominus$ Absence d'opportunité d'arbitrage : hypothèse très forte dans le cas des marchés de l'énergie
- ▶ $\ominus$ Les modèles sont souvent pauvres par rapports aux prix observés
- ▶ $\ominus$ Pas de possibilité d'anticiper des changements structurels de marché (développement de renouvelable, fermetures de centrales nucléaires...)

Modèle sur les prix spot

- ▶ Donne la dynamique des prix spot.
- ▶ Permet de représenter les comportements spécifiques des prix spot.

Remarques

- ▶ Problème principal : il faut préserver la facilité de calcul des prix à terme et de quelques dérivés.
- ▶ Beaucoup de modèles proposés dans la littérature.
- ▶ 3 approches différentes
 - ▶ Modèles à un facteur : préserve la propriété de Markov.
 - ▶ Modèles multi-dimensionnels (multi-facteurs). Plus de propriété de Markov sur les prix spot mais meilleure représentation des prix. Les facteurs explicatifs peuvent être inobservables (modèles économétriques classiques).
 - ▶ Modèles structurels. Voir section correspondante.

1. Approche financière

1.1 Modèle de Schwartz, l'approche convenience yield

1.2 Modèle de Gibson-Schwartz

1.3 Modèles Heath-Jarrow-Morton

2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

- ▶ **Modèles de Schwartz [Gibson and Schwartz, 1990, Schwartz, 1997, Hilliard and Reis, 1998, Cassassus and Collin-Dufresne, 1990]**
 - ▶ Modèles historiques pour la valorisation d'options sur les commodités
 - ▶ Origine : transposition du modèle le plus populaire sur les taux d'intérêt (Modèle de Vasicek)
- ▶ **Représentation des spécificités des commodités**
 - ▶ Rendement moyen
 - ▶ Comportement de retour à la moyenne
 - ▶ Variations de la volatilité en fonction de la maturité

Point clé

à voir dans la suite...

- **Valorisation de contrats à terme** : le prix d'un contrat à terme $F(t, T)$ est donné par l'espérance conditionnelle du sous-jacent S_T sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$:

$$F(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [S_T]$$

- **Valorisation de contrats à terme** : le prix d'un contrat à terme $F(t, T)$ est donné par l'espérance conditionnelle du sous-jacent S_T sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$:

$$F(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [S_T]$$

- **Pour les actifs classiques (actions)**

- **Valorisation de contrats à terme** : le prix d'un contrat à terme $F(t, T)$ est donné par l'espérance conditionnelle du sous-jacent S_T sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$:

$$F(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [S_T]$$

- **Pour les actifs classiques (actions)**

- Le prix actualisé de l'action est une martingale sous $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[S_T e^{-\int_t^T r_s ds} \right] = S_t$$

- Par conséquent, le prix à terme est (si on suppose l'indépendance entre r_t et S_t)

$$F(t, T) = S_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\int_t^T r_s ds} \right]$$

Notion clé : le convenience yield

Actif classique : arguments classiques d'absence d'opportunité d'arbitrage

$$F(t, T) = S_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\int_t^T r_s ds} \right]$$

Exemple simple

Si le taux sans risque n'est pas aléatoire,

$$F(t, T) = S_t e^{r(T-t)}$$

Il est équivalent entre entrer dans un contrat à terme pour être livré en T et emprunter au taux r pour acheter S_t et le garder jusqu'à T .

Notion clé : le convenience yield

Actif classique : arguments classiques d'absence d'opportunité d'arbitrage

$$F(t, T) = S_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\int_t^T r_s ds} \right]$$

Exemple simple

Si le taux sans risque n'est pas aléatoire,

$$F(t, T) = S_t e^{r(T-t)}$$

Il est équivalent entre entrer dans un contrat à terme pour être livré en T et emprunter au taux r pour acheter S_t et le garder jusqu'à T .

Mais les commodités ne sont pas des actifs classiques !

- **Les commodités ne sont pas des actifs classiques**

- ▶ **Les commodités ne sont pas des actifs classiques**
 - ▶ Le stockage a un coût
 - ▶ La commodité peut être consommée (valeur courante de consommation)
- ▶ **Comment représenter ces différences : le convenience yield δ_t**

Arguments d'absence d'opportunité d'arbitrage dans le cas des commodités

Il est équivalent entre entrer dans un contrat à terme et emprunter pour acheter la commodité à la date t et la stocker, mais avec un coût et/ ou une valeur associés.

$$F(t, T) = S_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\int_t^T r_s - \delta_s ds} \right]$$

Convenience yield : quelques illustrations

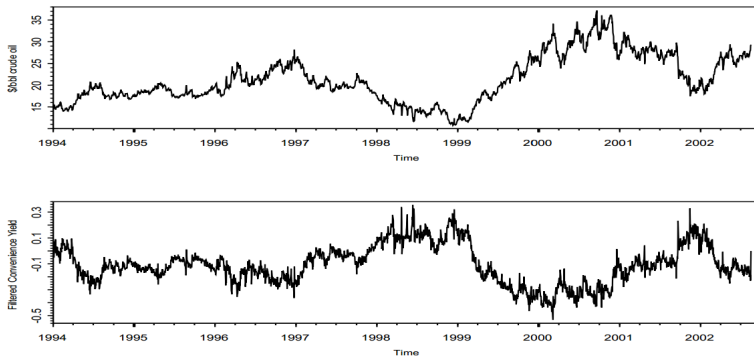


FIGURE – convenience yield estimé par filtrage dans [Ludkovski and Carmona, 2004]

Convenience yield : quelques illustrations

► Convenience yield estimé sur le pétrole

- [Gibson and Schwartz, 1990] : entre -20% et +150%
- [Schwartz, 1997] : entre -40% et +70%
- [Cassassus and Collin-Dufresne, 1990] : entre -50% et +70%
- [Cortazar and Schwartz, 2003] : entre -40% et +80%

► Autres commodités

- [Cassassus and Collin-Dufresne, 1990] : Faibles valeurs pour l'or et l'argent
- [Nielsen and Schwartz, 2004] : Cuivre, entre -20% et +50%

Convenience yield : quelques illustrations

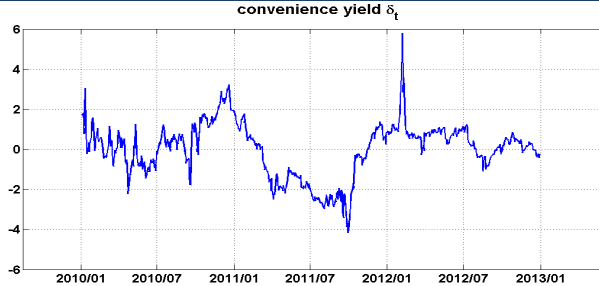


FIGURE – Convenience yield estimé par filtrage sur le marché gaz

Convenience yield vs taux sans risque

Pour les commodités énergétiques, le taux sans risque est très souvent négligeable devant le niveau du convenience yield

Retour au modèle de Schwartz [Schwartz, 1997]

- Processus stochastique sur le prix spot (sous la proba réelle $\mathbb{P}$) :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha(\beta - \ln S_t)dt + \sigma dW_t$$

- On définit $X_t = \ln S_t$ et on applique la formule d'Itô :

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

avec $\theta = \beta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}$ la valeur d'équilibre de long terme, α la vitesse de retour à la moyenne, mesurant la force de retour à la valeur d'équilibre de long terme, et σ caractérisant la volatilité du processus, dW_t étant l'incrément d'un mouvement brownien.

- On considère un deuxième changement de variable $Y_t = X_t e^{\alpha t}$ et on applique la formule d'Itô :

$$\ln S_t = \theta + (\ln S_0 - \theta)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

- ▶ Vitesse de retour à la moyenne : quelques chiffres
- ▶ α s'interprète grâce au temps de demi-vie : le temps moyen de la variable à diviser par deux sa distance à la valeur d'équilibre de long terme

α	Demi-vie $T_{1/2}$
1	≈ 8 mois
10	≈ 25 jours
100	≈ 2.5 jours
1000	≈ 6 heures

Modèles de Schwartz : calcul des prix à terme

- ▶ On considère $F(t, T)$ le prix à terme unitaire.
- ▶ L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dit : $F(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T | \mathcal{F}_t]$

Hypothèse

La probabilité risque neutre est obtenue par un changement de probabilité qui donne encore une dynamique de retour à la moyenne :

$$dX_t = \alpha(\tilde{\theta} - X_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

avec $\tilde{\theta} = \theta - \lambda$, λ la prime de risque, et $\tilde{W}$ un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$.

- ▶ Sous $\mathbb{Q}$:
- $$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T | \mathcal{F}_t] &= X_t e^{-\alpha(T-t)} + (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \tilde{\theta} \\ \text{Var}^{\mathbb{Q}}[X_T | \mathcal{F}_t] &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)})\end{aligned}$$

Modèles de Schwartz : calcul des prix à terme

► Comme $X_t = \ln S_t$, le prix à terme est donné par la transformée de Laplace de S_t :

$$F(t, T) = \exp \left\{ S_t e^{-\alpha(T-t)} + (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \tilde{\theta} + \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \right\}$$

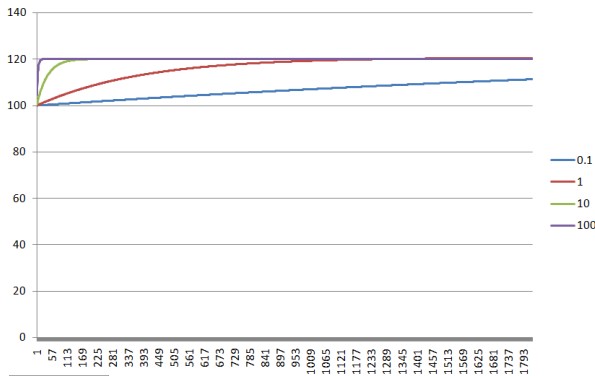


FIGURE – Courbes à terme modélisées en fonction de différentes valeurs de α ($S_t = 100$, $\tilde{\theta} = \ln(120)$, $\sigma = 15\%$)

Remarques

- ▶ La valeur limite des prix à terme dépend du *ratio* entre la volatilité et la valeur d'équilibre de long terme :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} F(t, T) = \exp \left\{ \tilde{\theta} + \frac{\sigma^2}{4\alpha} \right\}$$

- ▶ Les prix à terme ont une loi log-normale
- ▶ La volatilité des prix à terme dépend de la maturité : elle décroît avec la maturité (comme observé sur les données!).
- ▶ La vitesse de retour à la moyenne (**du prix spot**) définit aussi la vitesse de décroissance de la volatilité des prix à terme

Points clés

- ▶ Le prix spot n'est pas martingale sous $\mathbb{Q}$
- ▶ Les prix à terme sont martingale sous $\mathbb{Q}$
- ▶ Le prix spot, sous $\mathbb{Q}$ est centré sur la courbe à terme $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t] = F(t, T)$

1. Approche financière

1.1 Modèle de Schwartz, l'approche convenience yield

1.2 Modèle de Gibson-Schwartz

1.3 Modèles Heath-Jarrow-Morton

2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

- ▶ Évolution directe du modèle à un facteur : introduction d'un facteur stochastique, le convenience yield, amenant au modèle à deux facteurs :
 - ▶ Le premier facteur est le prix spot
 - ▶ Le second facteur est le convenience yield δ_t

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (\mu - \delta_t)dt + \sigma_1 dW_t^1 \\ d\delta_t &= \alpha(\beta - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^2\end{aligned}$$

avec (dW_t^1, dW_t^2) l'incrément d'un mouvement brownien bi-dimensionnel avec une corrélation notée ρ .

Remarques

- ▶ Ce modèle généralise le modèle à un facteur en prenant $\delta_t = \alpha \ln S_t$
- ▶ Le convenience yield peut s'interpréter comme des dividendes dans le cas classique de modélisation des actions.

- On considère $X_t = \ln S_t$ et on applique la formule d'Itô :

$$dX_t = (\mu - \delta_t - \frac{\sigma_1^2}{2})dt + \sigma_1 dW_t^1$$

- Par analogie avec les actions payant des dividendes, la tendance risque neutre du prix de commodité prend en compte le taux sans risque :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (r - \delta_t)dt + \sigma_1 d\tilde{W}_t^1 \\ d\delta_t &= [\alpha(\beta - \delta_t) - \lambda]dt + \sigma_2 d\tilde{W}_t^2\end{aligned}$$

$$d\tilde{W}_t^1 d\tilde{W}_t^2 = \rho dt$$

avec λ la prime du risque porté par le convenience yield.

- Il est aussi possible de calculer analytiquement les prix à terme :

$$F(t, T) = S_t \exp \left\{ -\delta_t \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + A(T-t) \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} A(T-t) &= \left(r - \tilde{\beta} + \frac{\sigma_2^2}{2\alpha^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\alpha} \right) (T-t) + \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{4\alpha^3} \\ &\quad + \left(\tilde{\beta}\alpha + \sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_2^2}{\alpha} \right) \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha^2} \\ \text{et } \tilde{\beta} &= \beta - \frac{\lambda}{\alpha} \end{aligned}$$

Modèle de Gibson-Schwartz

- Illustrations de courbes à terme obtenues par le modèle Gibson-Schwartz

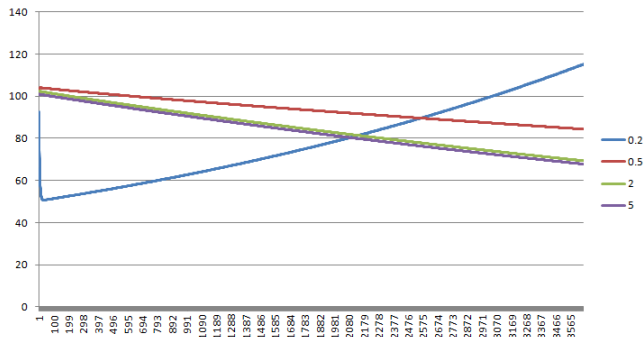


FIGURE – Courbes à terme du modèle de Gibson-Schwartz (2 facteurs) en fonction de différentes valeurs de α ($S_t = 100$, $\delta_t = 0.5\%$, $r = 1\%$, $\tilde{\beta} = 5\%$, $\sigma_1 = 15\%$, $\sigma_2 = 10\%$, $\rho = 0$)

Remarques

- ▶ Le modèle de Gibson Schwartz donne une large gamme de courbes à terme réalistes
- ▶ Le modèle introduit un facteur stochastique inobservable : le convenience yield
 - ▶ Interprétation économique : lien avec le coût du stockage, les bénéfices d'avoir la commodité...
 - ▶ Problème statistique : comment définir le modèle et le calibrer?
- ▶ *Schwartz a proposé, dans son article de référence (Schwartz 1997) un **modèle à 3 facteurs** en considérant un taux sans risque stochastique*

Quelques modèles alternatifs : [Schwartz and Smith, 2000]

- ▶ Idée : abandonner l'approche par convenience yield pour obtenir des calculs plus simples
- ▶ Rester dans le cadre des modèles factoriels, avec des facteurs X_t^s et X_t^l

Formulation de Schwartz et Smith

$$S_t = \exp \left\{ X_t^s + X_t^l \right\}$$

avec des processus corrélés :

$$\begin{aligned} dX_t^s &= -\alpha X_t^s dt + \sigma_s dW_t^s \\ dX_t^l &= \sigma_s dW_t^l \\ dW_t^s dW_t^l &= \rho dt \end{aligned}$$

1. Approche financière

1.1 Modèle de Schwartz, l'approche convenience yield

1.2 Modèle de Gibson-Schwartz

1.3 Modèles Heath-Jarrow-Morton

2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

Remarques

- ▶ Modèles inspirés de [Heath et al., 1992] pour le marché des taux.
- ▶ Les modèles HJM sont très populaires pour modéliser les taux d'intérêt, en particulier parce qu'il permettent de coller aux valeurs observées sur les marchés.
- ▶ Pour les prix de commodités, on trouve une première application de ces modèles dans [Jamshidian, 1992] pour le pétrole et dans [Cortazar and Schwartz, 1994] pour le cuivre.
- ▶ Fred Espen Benth a étudié en détail ces modèles [Benth et al., 2008]
- ▶ Autres références importantes : [Hinz et al., 2005, Hinz et al., 2006, Kiesel et al., 2009, Frestad et al., 2010]

- ▶ On considère $F(t, T)$ le prix à terme unitaire côté à la date t pour livraison à la date T .
- ▶ Le point de départ est de modéliser la dynamique des $F(t, T)$ sous la probabilité risque neutre.
- ▶ Comme $F(t, T)$ représente le prix à terme, il n'a pas de tendance sous la probabilité risque neutre.
- ▶ Sous sa forme la plus simple, la dynamique des $F(t, T)$ est définie par :

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sum_{i=1}^I \sigma_i(t, T) dW_t^i, \quad (1)$$

avec $\sigma_i(t, T)$ les I fonctions de volatilité et W^i les I mouvements browniens, considérés indépendants sans perte de généralité.

- Intégration par la formule d'Itô :

$$F(t, T) = F(t_0, T) \exp \left\{ \sum_{i=1}^I \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma_i^2(s, T) ds + \int_{t_0}^t \sigma_i(s, T) dW_s^i \right) \right\}$$

- Dédution du prix spot :

$$S_t = F(t_0, t) \exp \left\{ \sum_{i=1}^I \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma_i^2(s, t) ds + \int_{t_0}^t \sigma_i(s, t) dW_s^i \right) \right\}$$

- et en appliquant (encore) la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \left[\frac{\partial \ln F(t_0, t)}{\partial T} - \sum_{i=1}^I \left(\int_{t_0}^t \sigma_i(s, t) \frac{\partial \sigma_i(s, t)}{\partial T} ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_i(s, t)}{\partial T} dW_s^i \right) \right] dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \sigma_i(t, t) dW_t^i \end{aligned}$$

Un exemple important : le modèle à un facteur

- Première approche avec un facteur : fonction de volatilité constante $\sigma(t, T) = \sigma$.

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma dW_t \quad (2)$$

- On intègre :

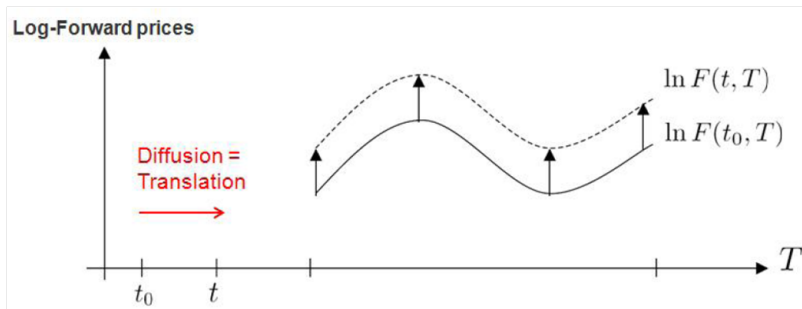
$$F(t, T) = F(t_0, T) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0) + \sigma \int_{t_0}^t dW_s \right\} \quad (3)$$

- et on en déduit le prix spot

$$S_t = F(t, t) = F(t_0, t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0) + \sigma \int_{t_0}^t dW_s \right\} \quad (4)$$

Un exemple important : le modèle à un facteur

► Effets sur la diffusion



Un exemple important : le modèle à un facteur

Modèle à un facteur

- ▶ Le cas d'une fonction de volatilité décroissante $\sigma(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)}$.
- ▶ Ce modèle permet de représenter l'effet Samuelson (volatilité décroissante avec la maturité)
- ▶ On intègre :

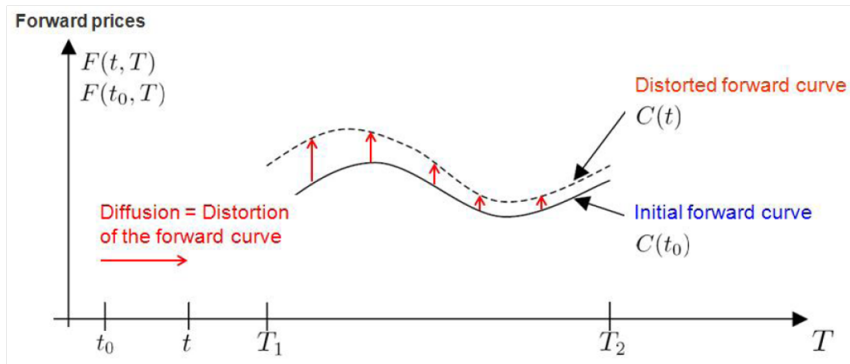
$$F(t, T) = F(t_0, T) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2 e^{-2\alpha(T-s)} ds + \sigma \int_{t_0}^t e^{-\alpha(T-s)} dW_s \right\}$$

- ▶ On en déduit le prix spot :

$$S_t = F(t, t) = F(t_0, t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-s)} ds + \sigma \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right\}$$

Un exemple important : le modèle à un facteur

► Effets sur la diffusion



Un exemple important : le modèle à un facteur

- Après calculs on obtient la dynamique du prix spot :

$$dS_t = S_t [\mu(t) - \alpha \ln S_t] dt + \sigma dW_t \quad (5)$$

avec

$$\mu(t) = \frac{\partial \ln F_{t_0}(t)}{\partial t} + \alpha \ln F_{t_0}(t) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t})$$

Remarque

- La dynamique résultante du prix spot est similaire à celle du modèle de Schwartz à un facteur, mais avec une valeur d'équilibre de long terme non constante. La vitesse de retour à la moyenne est reliée au paramètre α . Le même paramètre α caractérise à la fois la vitesse de retour à la moyenne du prix spot et la vitesse de décroissance de la volatilité en fonction de la maturité.

Modèles HJM

- ▶ **Les modèles HJM sont principalement dédiés au contexte financier de valorisation, de couverture et de gestion des risques.**
 - ▶ Permet des formules explicites de valorisation
 - ▶ Permet d'obtenir des stratégies explicites de couverture
- ▶ **Les modèles HJM sont très connus dans le contexte des taux d'intérêt**
- ▶ **Les modèles HJM permettent de représenter l'ensemble des prix à terme**
 - ▶ Les prix spot se déduisent en prenant une maturité à zéro
- ▶ **Les modèles HJM nécessitent une courbe à terme initiale qui doit être cohérente avec les données observées.**

1. Approche financière

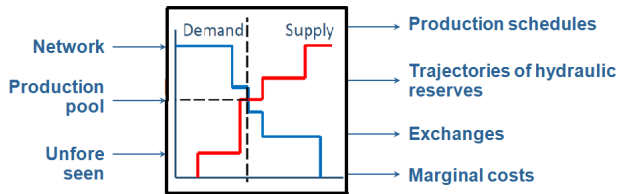
2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

Principe général : minimisation du coût global de production

- ▶ **Point de départ : l'expertise métier**
- ▶ **Reconstruction du « phénomène physique »**
 - ▶ Le principe commun et fondamental est le **croisement (équilibre) entre l'offre et la demande**
 - ▶ L'expertise permet de savoir comment se fait ce croisement
 - ▶ La construction du prix dépend des **variables fondamentales** (demande, offre, ou les éléments les composant)
 - ▶ Le modèle ne donne généralement pas le prix, mais donne le **coût marginal**
- ▶ **Applications visées**
 - ▶ Compréhension du marché
 - ▶ Gestion de la production au court terme
 - ▶ Études de long terme (stratégies d'investissement, impact des investissements sur les prix...)

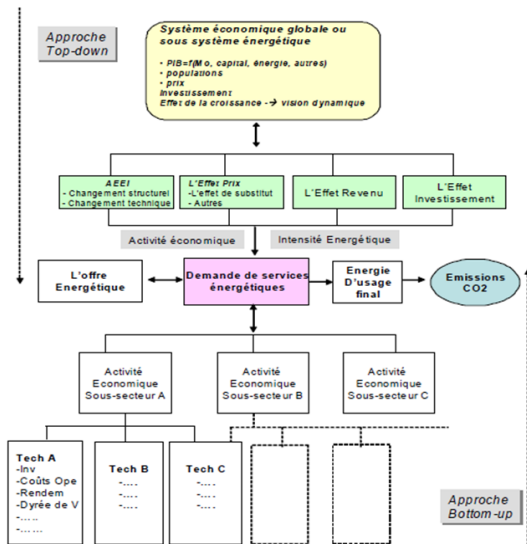
Principe pour l'électricité



► Principaux éléments pris en compte

- Requêtes (demandes)
- Contribution de l'hydraulique (dans le cas de l'électricité)
- Disponibilité des moyens de production (ou mines)
- Coûts des combustibles (dans le cas de l'électricité)
- Capacités de transport

Principe pour les commodités en général



► Avantages

- Approche totalement explicative de la formation des prix
- Possibilité de modéliser des contraintes d'échange sur le marché (profondeur du marché)
- Possibilité de prendre en compte des changements institutionnels

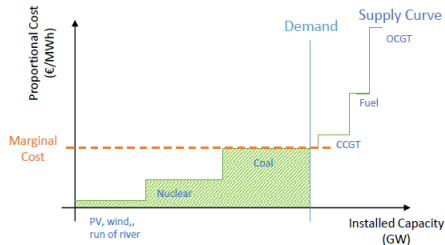
► Inconvénients

- Modèles complexes (par exemple pour le système électrique européen)
- Besoin de beaucoup de données
- Difficulté pour représenter des caractéristiques spécifiques dans les prix (pics) par des coûts marginaux

Rappel sur le coût marginal

Définition simple

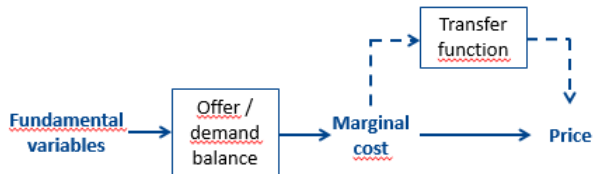
- Le coût marginal du système est le coût proportionnel de production du moyen le plus cher appelé pour satisfaire la demande
- C'est, en fait, le coût proportionnel de production pour produire 1MWh supplémentaire par rapport à la demande à satisfaire



Balance between supply and demand

Transfert du coût marginal au prix

- ▶ **La procédure d'optimisation permet d'obtenir le coût marginal**
 - ▶ Dans le cas d'un marché parfait, le prix est le coût marginal
 - ▶ En première approche, on peut considérer le prix égal au coût marginal
- ▶ **En pratique, il y a toujours une différence entre le prix et le coût marginal reconstruit par le modèle**
 - ▶ Le modèle physique ne représente pas les jeux d'acteurs et les imperfections de marché
 - ▶ Le modèle n'est pas capable de représenter toutes les variables et contraintes du système
 - ▶ Quelques variables ne sont pas observables (stratégies de production hydrauliques, pannes...)
- ▶ **On peut considérer une fonction qui transforme le coût marginal en prix**



Le cas de la valorisation

- ▶ Au lieu d'utiliser des lois non gaussiennes pour le prix spot, on met des lois gaussiennes sur les variables fondamentales et une structure non-linéaire pour construire le prix spot.
- ▶ Les données publiques (notion de transparence) permettent de développer ce type de modèles.
- ▶ Quelques modèles très simplifiés permettent de calculer les prix à terme en lien avec les prix spot.

▶ **Revue de littérature** : [Carmona and Coulon, 2012]

▶ 2 travaux récents

- ▶ **René Carmona**, Michael Coulon et al. : [Carmona et al., 2013]
- ▶ **René Aïd** et al. : [Aïd et al., 2009, Aïd et al., 2013]

Le modèle de Barlow

Modèle de Barlow [Barlow, 2002]

- Le prix spot S_t est déterminé par un équilibre entre la fonction d'offre $u_t(x)$ (croissante) et la fonction de demande $d_t(x)$ (décroissante) :

$$u_t(S_t) = d_t(S_t)$$

- On suppose une fonction d'offre constante $u_t = g$ et une demande inélastique $d_t(x) = D_t$ avec D_t la consommation d'électricité : $S_t = g^{-1}(D_t)$.
- Forme non-linéaire pour $g(x) = a - bx^\alpha$ avec $\alpha < 0$.
- Le prix est cappé si la demande excède la capacité maximum a .
- Modèle sur la demande : modèle de retour à la moyenne de vitesse λ , valeur d'équilibre a_1 et volatilité σ_1 .

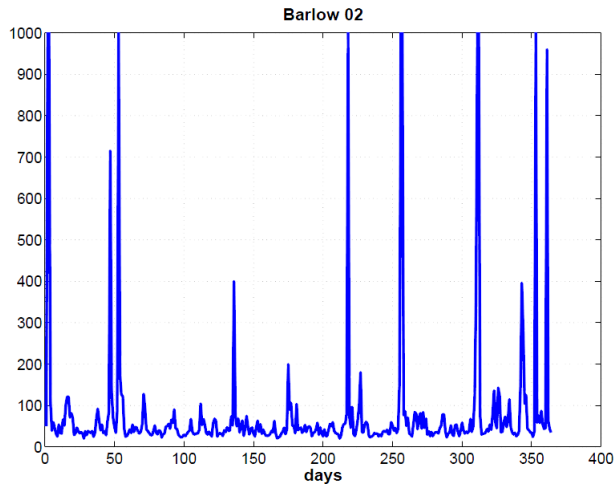
$$S_t = \begin{cases} \left(\frac{a-D_t}{b}\right)^{1/\alpha} & \text{if } D_t \leq a - \varepsilon b \\ \varepsilon^{1/\alpha} & \text{if } D_t \geq a - \varepsilon b \end{cases}$$

où ε est déterminé par le niveau du prix cappé.

Modèle de Barlow : modèle de retour à la moyenne non-linéaire

$$S_t = \begin{cases} \left(\frac{a-D_t}{b}\right)^{1/\alpha} & \text{if } D_t \leq a - \varepsilon b \\ \varepsilon^{1/\alpha} & \text{if } D_t \geq a - \varepsilon b \end{cases}$$
$$dD_t = \lambda(D_t - m)dt + \sigma dW_t$$

Modèle de Barlow : illustration



Modèle de Barlow : illustration

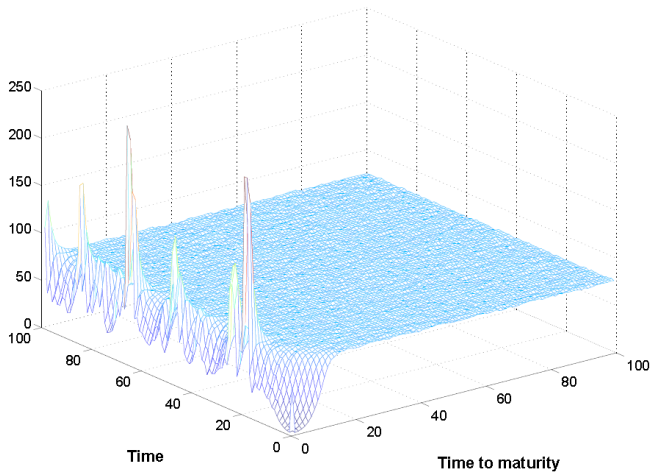


FIGURE – Forward curve dynamics implied by the Barlow model with prices cut at 250 for esthetic reason. Figure available in [Aïd, 2015]

Un modèle avec Demande et Capacités

- ▶ Un modèle pour la demande D_t et la capacité de production C_t
- ▶ Le prix spot S_t se définit comme la fonction d'équilibre Φ telle que

$$S_t = \Phi(D_t, C_t)$$

croissante avec D et décroissante avec C .

- ▶ *La relation entre les variables fondamentales et le prix est déterministe.* Pas de bruit ajouté.
- ▶ Selon la fonction Φ on peut obtenir les prix à terme de manière analytique.
- ▶ Spécifications possibles

$$S_t = \beta \exp \{ \gamma C_t + \alpha D_t \}$$

avec $\alpha > 0$ et $\gamma < 0$.

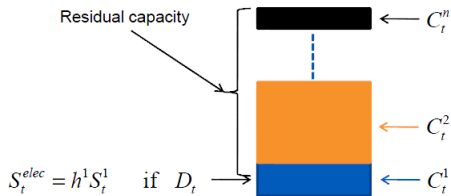
Un exemple de modèle structurel pour
les prix spot d'électricité

Modèle structurel : le prix comme le coût marginal [Aïd et al., 2009]

► Variables

- n combustibles, $1 \leq i \leq n$
- D_t demande (en MW)
- C_t^i capacités de production (en MW)
- S_t^i prix des combustibles (en €/MWh)
- h^i heat rates ($h^i S_t^i$ en €/MWh, croissants avec i)

► Principe

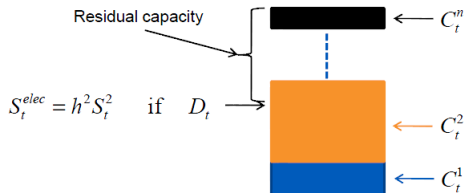


Modèle structurel : le prix comme le coût marginal [Aïd et al., 2009]

► Variables

- n combustibles, $1 \leq i \leq n$
- D_t demande (en MW)
- C_t^i capacités de production (en MW)
- S_t^i prix des combustibles (en €/MWh)
- h^i heat rates ($h^i S_t^i$ en €/MWh, croissants avec i)

► Principe



► Variables

- n combustibles, $1 \leq i \leq n$
- D_t demande (en MW)
- C_t^i capacités de production (en MW)
- S_t^i prix des combustibles (en €/MWh)
- h^i heat rates ($h^i S_t^i$ en €/MWh, croissants avec i)

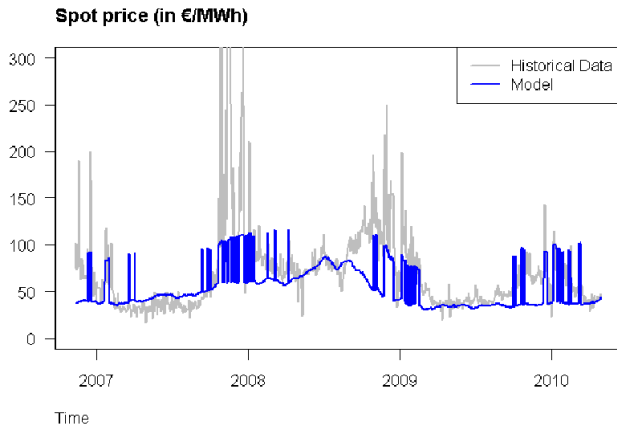
► Principe : Première partie du modèle

$$S_t = \sum_{i=1}^n h_i S_t^i \mathbb{1}_{D_t \in I_t^i}$$

$$\text{avec } I_t^i = \left] \sum_{k=1}^{i-1} C_t^k ; \sum_{k=1}^i C_t^k \right]$$

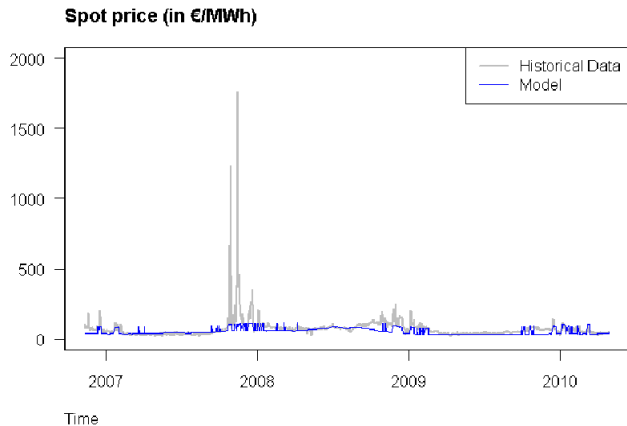
Modèle structurel : Illustration

- ▶ Illustration sur le marché français (du 13 novembre 2006 au 30 avril 2010)
- ▶ Focus sur la 19ème heure de chaque jour
- ▶ 2 combustibles possibles : le charbon et le pétrole (taxe CO2 incluse dans le coût)



Modèle structurel : Illustration

- ▶ Illustration sur le marché français (du 13 novembre 2006 au 30 avril 2010)
- ▶ Focus sur la 19ème heure de chaque jour
- ▶ 2 combustibles possibles : le charbon et le pétrole (taxe CO2 incluse dans le coût)



► **Coût marginal**

$$MC_t = \sum_{i=1}^n h_i S_t^i \mathbb{1}_{D_t \in I_t^i}$$

► **Idée** : les pics de prix apparaissent quand la capacité résiduelle RC_t est faible

$$\begin{aligned} RC_t &= \sum_{i=1}^n C_t^i - D_t \\ &= C_t^{max} - D_t \end{aligned}$$

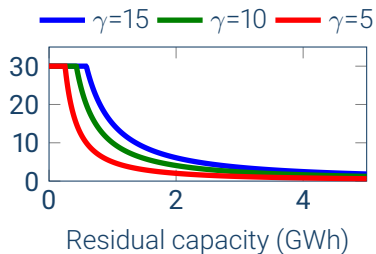
► On écrit $\frac{S_t}{MC_t}$ comme une fonction de RC_t

► Modèle

$$S_t = g(C_t^{\max} - D_t) \sum_{i=1}^n h_i S_t^i \mathbb{1}_{D_t \in I_t^i}$$

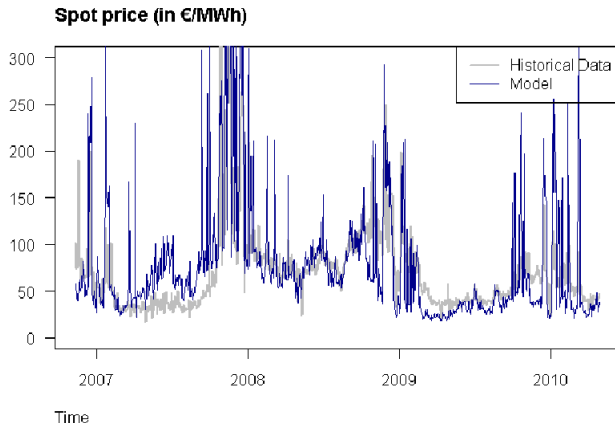
► Fonction de rareté

$$g(x) = \min\left(M, \frac{\gamma}{x^\nu}\right) \mathbb{1}_{x>0} + M \mathbb{1}_{x<0}$$



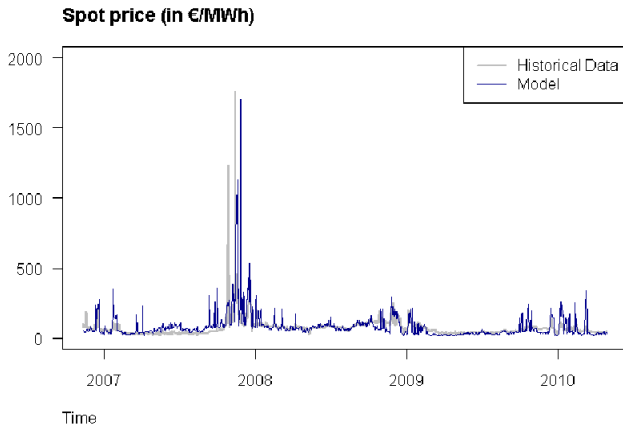
Modèle structurel : illustration

- ▶ Illustration sur le marché français (du 13 novembre 2006 au 30 avril 2010)
- ▶ Focus sur la 19ème heure de chaque jour
- ▶ 2 combustibles possibles : le charbon et le pétrole (taxe CO2 incluse dans le coût)



Modèle structurel : illustration

- ▶ Illustration sur le marché français (du 13 novembre 2006 au 30 avril 2010)
- ▶ Focus sur la 19ème heure de chaque jour
- ▶ 2 combustibles possibles : le charbon et le pétrole (taxe CO2 incluse dans le coût)



- ▶ $S_t^i, i = 1, \dots, n$: spread $Y_t^i = h^i S_t^i - h^{i-1} S_t^{i-1}$ comme un brownien géométrique
- ▶ $D_t, C_t^i, i = 1, \dots, n$: fonction déterministe + modèle de retour à la moyenne

Modélisation de la demande et des capacités

fonction déterministe + modèle de retour à la moyenne

$$D_t = f_D(t) + Z_D(t)$$

$$C_t^i = f_i(t) + Z_i(t)$$

► Partie déterministe :

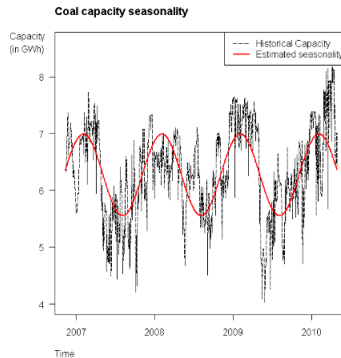
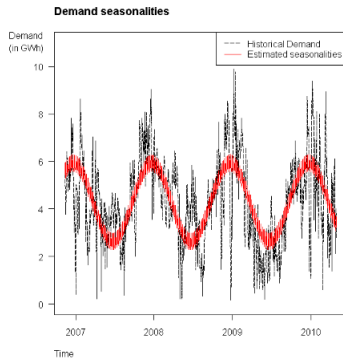
$$f_D(t) = d_1^{(D)} + d_2^{(D)} \cos \left(2\pi(t - d_3^{(D)}) \right) + \mathbf{week}_D(t)$$

$$f_i(t) = d_1^{(i)} + d_2^{(i)} \cos \left(2\pi(t - d_3^{(i)}) \right) + \mathbf{week}_i(t)$$

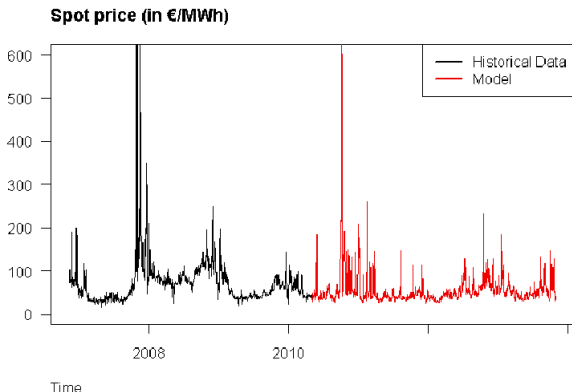
► Partie stochastique : modèle de retour à la moyenne

$$\begin{aligned} dZ_D(t) &= -\alpha_D Z_D(t)dt + \beta_D dW_t^D \\ dZ_i(t) &= -\alpha_i Z_i(t)dt + \beta_i dW_t^i \end{aligned}$$

Modélisation de la demande et des capacités



Simulation de prix spot



Attention !

Ce graphe n'est qu'une illustration sur le comportement du prix spot.
Ce n'est pas un outil de prévision.

Un mot sur les prix forwards

- Les prix forward peuvent se déduire par un raisonnement d'absence d'opportunité d'arbitrage

$$F(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t]$$

- Dans le cas du modèle sans fonction de rareté

$$S_t = \sum_{i=1}^n h_i S_t^i \mathbb{I}_{D_t \in I_t^i}$$

et en supposant l'indépendance entre les prix des combustibles et les variables fondamentales

$$F(t, T) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\mathbb{I}_{D_T \in I_T^i} | \mathcal{F}_t \right]}_{\mathbb{P}(D_T \in I_T^i)} h_i F_t^i(T)$$

Prix forward [Aïd, 2009]

Le prix du produit forward est une combinaison linéaire des prix forward des combustibles, les poids correspondant à la probabilité de marginalité de chaque combustible.

- ▶ Étude 60% ENR en France : <http://www.wec-france.org/DocumentsPDF/Presentations/V.Silva-31mars2017.pdf>
- ▶ Impact des arrêts de tranches nucléaires le 16 octobre 2016 sur les prix forwards en France et en Allemagne : [Alasseur and Féron,]
- ▶ Impact sur les prix spot de l'annonce de François Hollande (25 avril 2016) d'un prix plancher du CO2

Conclusions sur l'approche fondamentale

- ▶ **Approche réaliste, consensus sur le phénomène de construction du prix**
- ▶ **Approche exclusive pour les études d'impact de changements structurels**
- ▶ **La mise en œuvre est souvent complexe**
 - ▶ La procédure d'optimisation est complexe, en grande dimension et avec un très grand nombre de contraintes
 - ▶ Le modèle nécessite un grand nombre de données (demande, demande résiduelle, capacités disponibles, prévisions météorologiques...)
- ▶ **Le modèle est essentiellement dédiés aux prix spot**
 - ▶ L'expertise métier est principalement sur le prix spot (sur le coût marginal)
 - ▶ Le marché forward nécessite une expertise et des connaissances en économie et théorie de jeux d'acteurs

Limites de l'approche fondamentale pour représenter les prix spot



- ▶ Les erreurs de représentation des prix spot futurs viennent de 2 sources principales
 - ▶ L'erreur dans la représentation des variables fondamentales
 - ▶ L'erreur dans la fonction de construction du prix spot
- ▶ L'approche fondamentale vise à définir le modèle le plus précis possible pour construire le prix spot
- ▶ le problème de représentation aléatoire est transféré sur les variables fondamentales
 - ▶ Sur un horizon court terme, la prévision des variables fondamentales est précise
 - ▶ Sur le long terme, les études sont principalement faites à partir d'un faible nombre de scénarios (par exemple les scénario « Poyry »)
 - ▶ Sur le moyen terme, le problème est ouvert...

Limites de l'approche fondamentale pour représenter les prix spot



Même si la construction du prix (par optimisation du coût global de production) est générale et commune dans la plupart des marchés, les pays diffèrent significativement par leur mix de production. Par conséquent, les variables fondamentales à prendre en compte dépendent fortement du ou des marchés considérés.

FIGURE – Distribution des capacités installées dans différents marchés dans le monde (Platts WEPP, 2009)

1. Approche financière

2. Approche fondamentale

3. Approche économétrique

Monde énergétique complexe

Il est impossible de connaître *a priori* toutes les données et tous les phénomènes exacts qui aboutissent aux prix observés

► Champs d'application

- **Compréhension** du comportement des prix
- Représentation des marchés pour la gestion de production (en particulier sur le moyen terme) et pour le calcul d'indicateurs de risques
- Aide au trading
- Valorisation de contrats spécifiques

► Données observées comme une série temporelle

- Les données forment une suite de valeurs numériques indexées par le temps. En règle générale, les données sont observées à intervalles de temps réguliers.
- On ne tient (presque) pas compte de la nature de l'observation (prix, température ?)

► Caractéristiques que l'on cherche à identifier

- Tendance
- Saisonnalité
- Lien avec les valeurs passées
- Lien avec d'autres variables

► Notion centrale : stationnarité

- Pour être capable de prévoir la valeur d'une variable, il est nécessaire qu'elle ait un comportement invariant dans le temps (i.e. stationnaire).
- La stationnarité peut être définie
 - Au sens fort : toute la loi est invariante dans le temps
 - Au sens faible : seulement certaines caractéristiques (moyenne, variance) sont invariantes dans le temps

► Avantages

- Traite directement les données observées $\Rightarrow$ analyse objective du comportement des prix
- Permet d'utiliser toute l'artillerie existante des outils statistiques et de *machine learning*
- Permet d'estimer précisément les liens entre les prix et ses valeurs passées, des variables explicatives...

► Inconvénients

- Souvent des modèles complexes (avec beaucoup de paramètres à estimer)
- Besoin de beaucoup de données
- Besoin de l'hypothèse forte de stationnarité (i.e. il sera très difficile, voire impossible, d'étudier l'impact de changements structurels sur les prix avec des modèles statistiques)

► Visualisation des données (par un graphe) pour une première analyse

- Tendance
 - Saisonnalité
 - Volatilité non constante
 - **Autocorrélation (partielle)**
 - Présence de ruptures, de sauts, de pics...
 - Données manquantes
 - Données aberrantes
- } Caractéristiques déterministes
- } Caractéristiques statistiques
- } Caractéristiques à ne pas reproduire

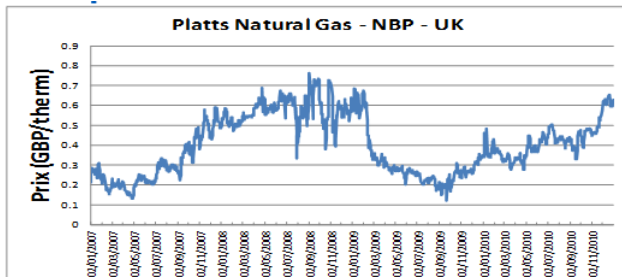
► Visualisation de certaines caractéristiques des données

- Les valeurs
- Les différences de valeurs
- **L'auto-corrélation**

Point de départ : les données

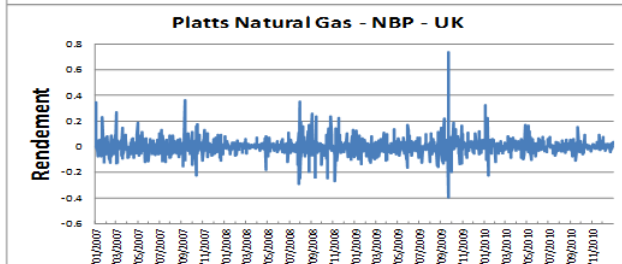
Exemple : mêmes données (informations) mais 2 différentes façons de les regarder

Prix
 Y_t



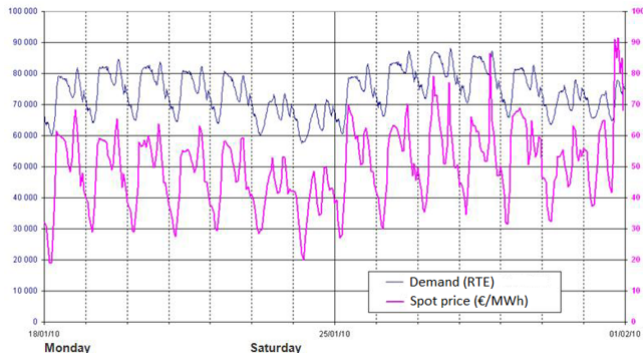
Rendement

$$\ln\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)$$



Les données : lien avec d'autres variables (exogènes)

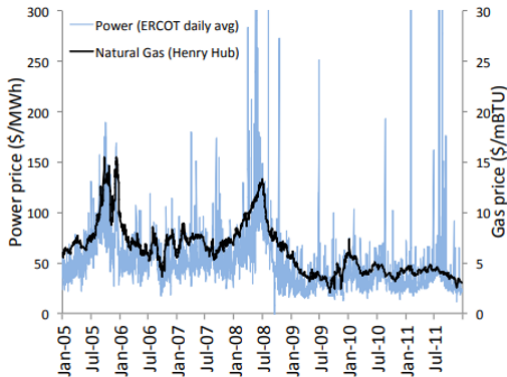
Une simple analyse visuelle permet de montrer un lien net entre le prix d'électricité et la demande en France



French data from EpexSpot (price) and RTE (demand): W3-W4 2010

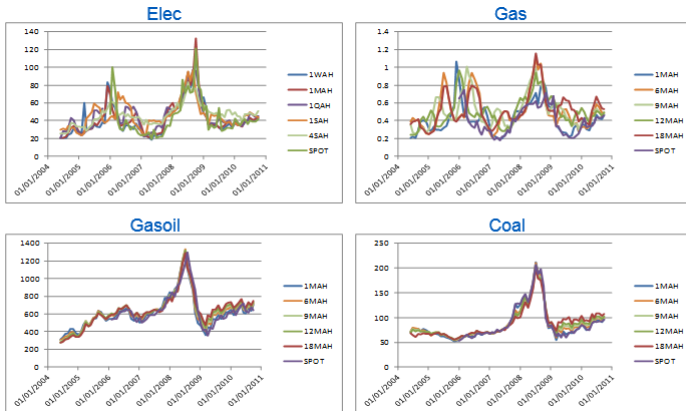
Les données : lien avec d'autres variables (exogènes)

Une simple analyse visuelle permet de montrer un lien net entre les prix d'électricité et du gaz au Texas (marché ERCOT)



Les données : lien avec d'autres variables (exogènes)

Une simple analyse visuelle permet de montrer un lien net entre les prix spot et forward des commodités énergétiques



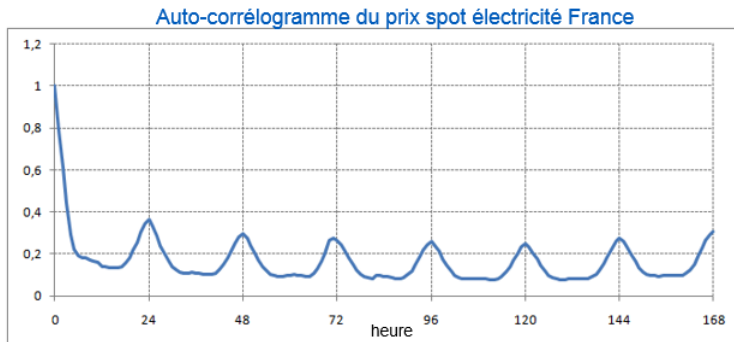
Auto-corrélation

L'auto-corrélation d'un processus temporel Y_t à l'ordre h pour l'instant t , est la corrélation entre la valeur observée à l'instant t et celle observée à l'instant $t - h$:

$$\rho(t, h) = \text{Cor}(Y_t, Y_{t-h})$$

- ▶ Si le processus est stationnaire, alors $\rho(t, h)$ ne dépend pas de h
- ▶ **Auto-corrélogramme** : c'est le graphe de la fonction d'auto-corrélation, en tant que fonction de h . Il permet d'identifier
 - ▶ Une saisonnalité
 - ▶ Une non-stationnarité
 - ▶ La taille du passé qui influence encore la valeur du présent

Exemple d'autocorrélogramme



Les pics montrent une corrélation entre S_t^{elec} et S_{t-24}^{elec}

1. Décomposition de la série temporelle

- ▶ Partie déterministe (tendance, saisonnalité)
- ▶ Partie aléatoire (représentant la part incertaine du prix)

2. Modélisation et estimation de la partie déterministe

3. Modélisation et estimation de la partie aléatoire

- ▶ Choix du modèle
- ▶ Estimation des paramètres du modèle
- ▶ Tests de validation

Objectif

Aboutir à un résidu ayant de bonnes propriétés

- ▶ **Stationnarité**
- ▶ Indépendance entre deux instants
- ▶ Facilité de simulation (loi connue, par exemple)

- Modèle général de décomposition :

$$Y_t = D_t + X_t$$

- Y_t : données observées
 - D_t : partie déterministe (qui peut dépendre de variables exogènes)
 - X_t : partie aléatoire, représentant l'incertitude sur les données observées (qui peut elle aussi dépendre de variables exogènes)
-
- Il s'agit ensuite de modéliser (enlever) chacune des parties de la décomposition du signal temporel

$$Y_t = D_t + X_t$$

- ▶ Modélisation de la tendance
 - ▶ Tendance linéaire
 - ▶ Tendance polynomiale (mais quel degré du polynôme?)

$$T_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_d t^d$$

- ▶ Ou pas de modèle : estimation par moyenne mobile

$$T_t = \frac{1}{2h+1} \sum_{h=-H}^{+H} Y_{t+h}$$

- ▶ Différenciation pour enlever la tendance

$$Y_t = D_t + X_t$$

- Modélisation de la saisonnalité

- Forme journalière, hebdomadaire, qui se répète (**Dummy variables**). Ex : spécification sur h , d , m l'heure dans la journée, la journée dans la semaine et le mois de l'année

$$D_t = \sum_{h,d,m}^d c_{h,d,m} \mathbb{1}_{t \in E_{h,d,m}}$$

- Fonctions sur une base. Ex : les sinusoides

$$D_t = \sum_j \alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t)$$

- Différenciation pour enlever la saisonnalité

$$Y_t = D_t + X_t$$

- Modélisation de la dépendance

- Formulation générale : soient N variables exogènes $V_1(t), \dots, V_N(t)$

$$D_t = f(V_1(t), \dots, V_N(t))$$

- Généralement des fonctions simples, par exemple linéaires...

$$D_t = \alpha_1 V_1(t) + \alpha_2 V_2(t) + \dots + \alpha_N V_N(t)$$

- ...ou plus complexes comme les modèles *Generalized Adaptive Model* (GAM)

En fait, la forme générale peut intégrer la tendance et la saisonnalité : quelques variables exogènes peuvent simplement être des constantes, des sinusoides ou des variables de temps...

$$Y_t = D_t + X_t$$

► **Modèle Autorégressif (AR) d'ordre p :**

$$X_t = \mu + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- La valeur au temps t dépend linéairement des valeurs passées
- ε_t est un **bruit blanc** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varepsilon_t] &= 0, \quad \forall t \in [0 ; T] \\ \text{Var}[\varepsilon_t] &= \sigma^2, \quad \forall t \in [0 ; T] \\ \text{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}] &= 0, \quad \forall t \in [0 ; T], \forall h\end{aligned}$$

$$Y_t = D_t + X_t$$

► **Modèle à moyenne mobile (MA) d'ordre q :**

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + b_q\varepsilon_{t-q}$$

- La valeur au temps t dépend linéairement des bruits blancs présents et passés
- ε_t est un **bruit blanc**.

► **Modèle ARMA(p, q) :**

$$X_t = \mu + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \cdots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + b_q\varepsilon_{t-q}$$

- La valeur au temps t dépend linéairement des valeurs passées et des bruits blancs présents et passés
- ε_t est un **bruit blanc**.

- ▶ Suivant l'idée simple des modèles de type ARMA, beaucoup d'extensions existent :
 - ▶ Introduction d'incrémentes avec un lag spécifique (par exemple $X_t - X_{t-24}$) : **ARIMA** (AR-Integrated-MA)
 - ▶ Introduction de la saisonnalité dans la différenciation : **SARIMA** (Seasonal ARIMA)
 - ▶ Introduction d'une dépendance à des variables exogènes : **ARX, ARIMAX, SARIMAX**
 - ▶ Approches de type « Régime-Switching »
 - ▶ Le changement de modèle (ou de paramètres de modèle) est activé quand une variable exogène atteint un seuil : **TAR** (Threshold-AR)
 - ▶ Le changement de modèle (ou de paramètres de modèle) est activé quand le prix lui-même atteint un seuil : **SETAR** (Self-Excited TAR)
 - ▶ Le changement de modèle (ou de paramètres de modèle) est activé en fonction d'une variable non observable : **General Regime Switching model**
- ▶ Dans tous les cas, les modèles considèrent des relations linéaires

$$Y_t = D_t + X_t$$

- ▶ Autre grande classe de modèles : les modèles de type **ARCH** (Autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques)

$$X_t = ARMA + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | I_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

- ▶ Principe : la volatilité change au cours du temps et dépend de l'information disponible (niveau des prix...)
- ▶ Permet de représenter des périodes de faible volatilité et des périodes de forte volatilité, par exemple.

Stationnarité

Le processus est stationnaire si les paramètres de la modélisation sont constants dans le temps

- ▶ Paramètres de tendance
- ▶ Paramètres de saisonnalité
- ▶ Paramètres du processus aléatoire

$$(a_i)_{i=1,\dots,p}$$

$$(b_j)_{j=1,\dots,q}$$

$$\sigma_t^2$$

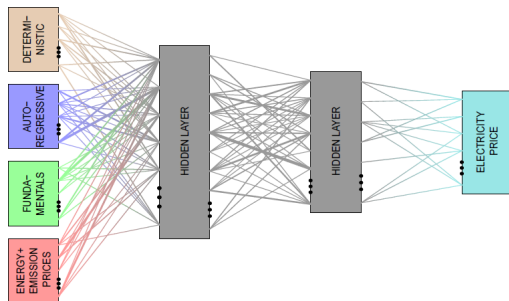
- ▶ Des tests statistiques doivent être effectués pour valider le modèle avec ses paramètres estimés
- ▶ Objectif : comparer ce que donne le modèle avec les observations
- ▶ Les principales mesures d'erreur utilisées en pratique sont les plus classiques en statistique : soient Y_t le prix réalisé et $\hat{Y}_t$ le prix estimé / prédit :
 - ▶ Absolute Error (**AE**) : $|Y_t - \hat{Y}_t|$
 - ▶ Mean Absolute Error (**MAE**), moyenne des AE sur une période donnée : $\sum_{t=1}^T |Y_t - \hat{Y}_t|$
 - ▶ Absolute Percentage Error (**APE**) : $\frac{|Y_t - \hat{Y}_t|}{Y_t}$
 - ▶ Mean Absolute Percentage Error (**MAPE**) : $\sum_{t=1}^T \frac{|Y_t - \hat{Y}_t|}{Y_t}$
- ▶ Root Mean Square Error (**RMSE**) : $\sqrt{\sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{Y}_t)^2}$

Quelques résultats récents sur la prévision de prix spot d'électricité

- ▶ **Les modèles prenant en compte des variables exogènes (pertinentes) sont plus performants**
 - ▶ Les variables exogènes expliquent une grande partie de l'évolution du prix
 - ▶ La variable la plus pertinente est souvent la demande résiduelle
 - ▶ Mais cela nécessite une méthode de sélection de variables, qui dépend du marché considéré
 - ▶ Il est aussi nécessaire de bien prévoir les variables exogènes
- ▶ **Les modèles uni-dimensionnels ou multi-dimensionnels ne sont pas significativement différents en termes de performances de prévision**
 - ▶ Modèle uni-dimensionnel : considère le prix spot à une granularité horaire
 - ▶ Modèle multi-dimensionnel : considère le prix spot comme un vecteur de taille 24 à granularité journalière
- ▶ **Les modèles les plus récents et les plus efficaces considèrent des techniques de mélange de prédicteur**
 - ▶ Considération d'un grand nombre de modèles (et de prédictions de prix)
 - ▶ Considération d'un mélange approprié (optimal), comme une combinaison linéaire des prédicteurs disponibles, pour donner une prédiction finale plus performante

Croissance rapide des modèles de prix de l'électricité basés sur les

- ▶ Augmentation de la qualité et de la disponibilité des données
- ▶ Améliorations des algorithmes d'optimisation et de la puissance de calcul
- ▶ Abondante littérature sur la prévision des prix spot de l'électricité : [Weron, 2014, Lago et al., 2021]
- ▶ Des développements récents favorisent les approches basées sur l'IA... mais sans amélioration significative



Source : [Ziel, 2022]

- ▶ **On cherche à représenter le comportement d'une série temporelle par rapport à une ou plusieurs autres variables.**
 - ▶ C'est une propriété évidente des prix des commodités. La prise en compte de cette information permet de mieux représenter et prévoir l'évolution des prix
 - ▶ La modélisation multi-commodités, et multi-variables en général, est essentielle pour de nombreuses applications.
- ▶ **On doit alors faire face au problème de grande dimension**
 - ▶ Les outils récents de **machine learning** et d'**intelligence artificielle** sont, à ce jour, très efficaces pour estimer les liens entre variables et gérer la grande dimension.
 - ▶ Plus précisément, les outils tels que les « Random Forest » permettent de sélectionner les variables les plus importantes et avoir rapidement un modèle de prévision.

- **Formulation générale** un modèle par heure $\Rightarrow$ 24 modèles horaires

$$X_t^h = \ln S_t^h = D_t^h + X_t^h, \quad h = 1, \dots, 24$$

avec

- Y_t^h la partie déterministe liée aux variables explicatives

$$D_t^h = c_1 V_{t,1}^h + c_2 V_{t,2}^h + \dots + c_N V_{t,N}^h$$

- X_t^h la partie aléatoire.

- **Procédure de modélisation et d'estimation**

1. Utilisation des N facteurs explicatifs $(V_{t,n}^h)_{n=1,\dots,N}$ pour les 24 logarithmes de prix horaires.
2. Caractérisation des 24 parties aléatoires X_t^h .

► 32 variables explicatives utilisées

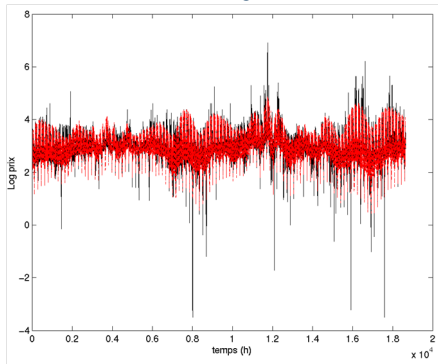
- Cycle annuel
- Variables calendaires (jours fériés, vacances scolaires, jours de la semaine)
- Tendance linéaire
- Variables déduites de la température en France

► La valeur estimée des paramètres caractérise l'influence des facteurs explicatifs sur les prix

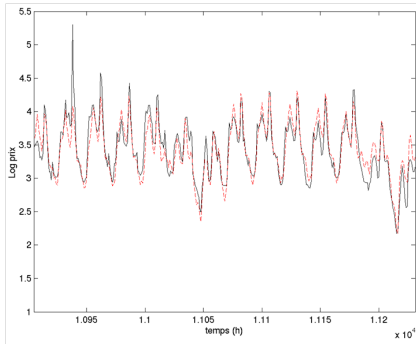
- Exemple : *1°C de moins en France amène à une augmentation du prix spot de 10% (en heure de pointe)*

► Nombre de paramètres : $24 \times 32 \approx 600$ paramètres!!! (après élimination des paramètres non significatifs)

Résultat global



Zoom



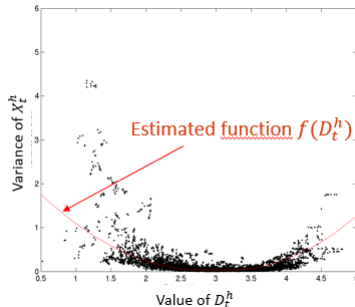
En noir, le

prix spot observé; en rouge, la partie déterministe estimée $\hat{D}_t^h$ du modèle

80% de la variabilité des prix spot est expliquée par la partie déterministe du modèle

- ▶ Après avoir analysé les parties aléatoires « observées »
 $\hat{X}_t^h = \ln S_t^h - \hat{D}_t^h$, on observe que la variance de X dépend du niveau de la partie déterministe
 - ▶ La variance est forte quand les prix sont très bas ou très hauts
 - ▶ On en déduit un modèle :

$$X_t^h = f(D_t^h) \cdot Z_t^h$$



Partie aléatoire : modélisation des 24 processus X_t^h

- ▶ Après avoir analysé les résidus « observés » $\hat{Z}_t^h = \frac{\hat{X}_t^h}{\hat{f}(\hat{D}_t^h)}$, on observe une dépendance temporelle
- ▶ On propose alors un modèle AR(1) sur ce résidu :

$$Z_t^h = a^h Z_{t-1}^h + \varepsilon_t^h$$

- ▶ Aussi, dans le but de représenter le lien entre les 24 processus, on considère des corrélations entre les bruit ε_t^h :

$$\text{Cov} [\varepsilon_t^h ; \varepsilon_t^g] = \Sigma_{gh}$$

toutes ces corrélations étant regroupées dans la matrice de corrélation Σ .

- ▶ Finalement, dans le but de représenter les pics de prix, les bruits ε_t^h sont modélisés par une *loi de Student*

Formulation complète du modèle

► Modèle général

$$\ln S_t^h = D_t^h + X_t^h, \quad h = 1, \dots, 24$$

avec

$$D_t^h = c_1 V_{t,1}^h + c_2 V_{t,2}^h + \dots + c_N V_{t,N}^h$$

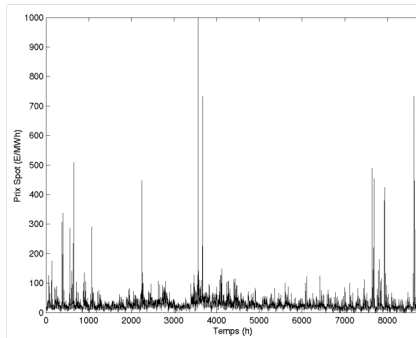
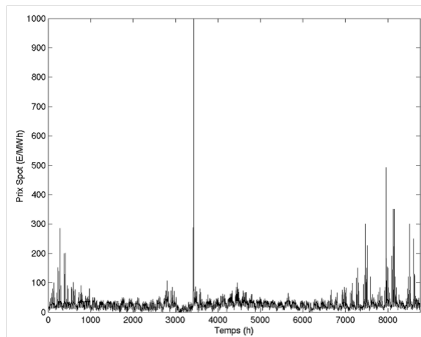
$$X_t^h = f(D_t^h) Z_t^h$$

$$Z_t^h = a^h Z_{t-1}^h + \varepsilon_t^h$$

$$\text{Cov} [(\varepsilon_t^1, \dots, \varepsilon_t^{24})^T] = \Sigma$$

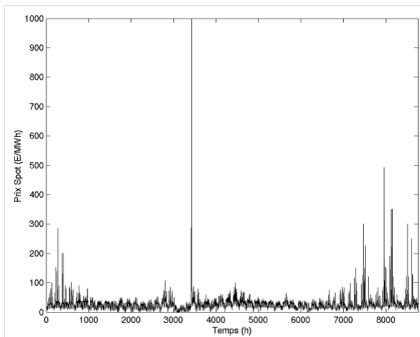
► **Les pics de prix** sont induits par une loi de **Student** sur les résidus $(\varepsilon_t^h)_{h=1, \dots, 24}$.

Performances de simulation de prix

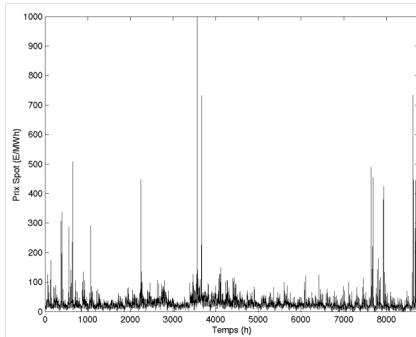


Performances de simulation de prix

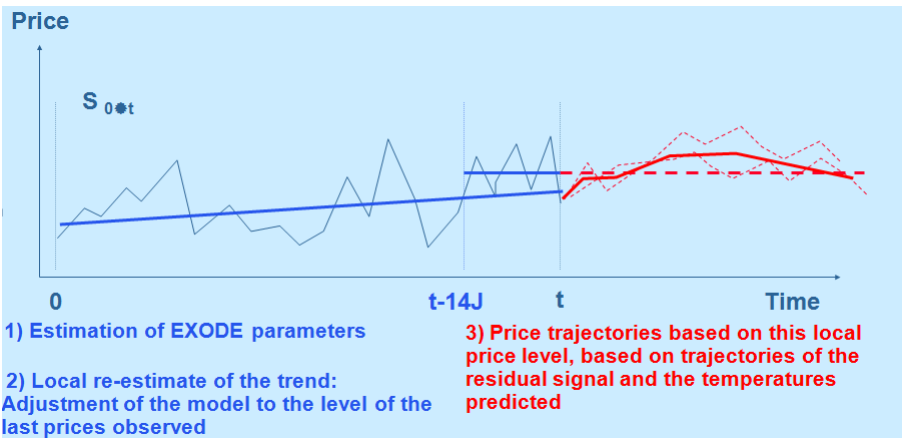
Période d'estimation
(15/08/2000-31/09/2002)



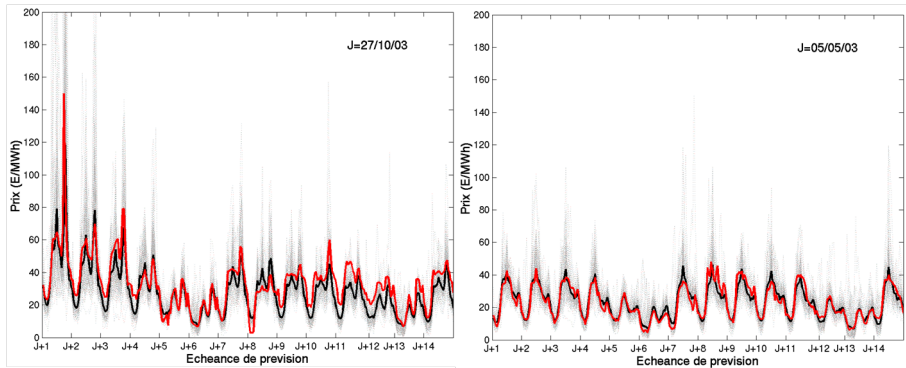
Période de simulation
(01/10/2002 - 31/09/2003)



Performances de prévision



Performances de prévision

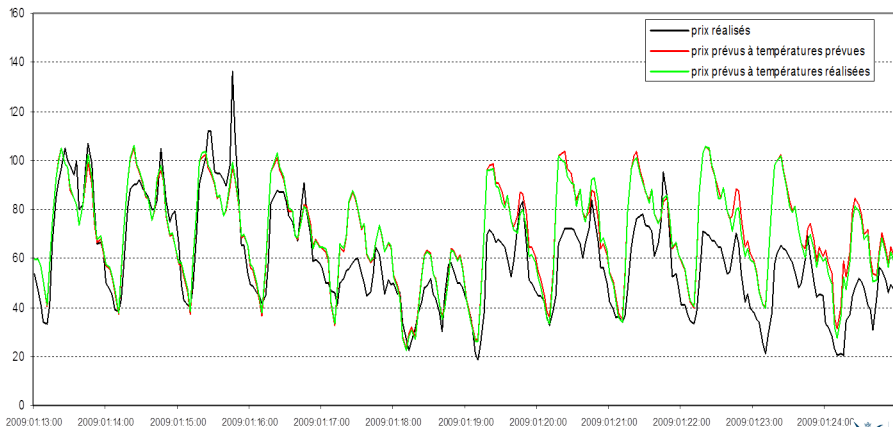


Incertitude sur les prévisions : de 18% à J+1 à 26% à J+12

Performances de prévision

Avec une prévision de température : l'erreur de prévision de température ne cause pas les erreurs de prévision sur les prix.

Prévisions de prix spot PWXT au 12/01/09 et réalisés



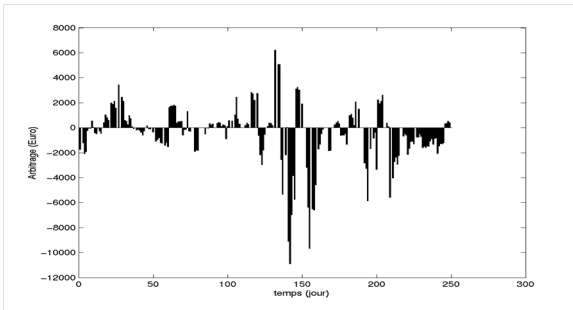
- ▶ **Objectif** : faire de l'arbitrage entre le produit forward 1 Week-ahead (1WAH) et la prévision de la moyenne des prix spot de la semaine correspondante
 - ▶ Chaque jour t , on observe le produit 1WAH (pour livraison la semaine prochaine) : $1WAH(t)$
 - ▶ Chaque jour t , on calcule la prévision des prix spot de la semaine prochaine et on en calcule la moyenne

$$M_{spot}(t) = \frac{1}{168} \sum_{t \in \text{semaine}} \hat{S}_t$$

- ▶ On prend alors la position : si $1WAH(t) < M_{spot}(t)$, on prend une position acheteuse sur le $1WAH(t)$, sinon on prend une position vendeuse.

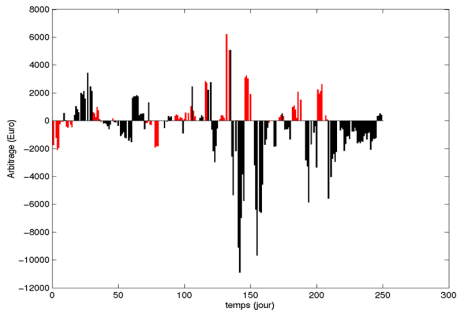
Application : trading Weak-ahead / Spot

- ▶ Données 2003 : marché spot EEX et indice GPI (Dow Jones) week-ahead baseload
- ▶ Hypothèses
 1. Toutes les opportunités sont saisies
 2. Transaction maximum de 10MWh pour chaque prix spot horaire
- ▶ Observation : arbitrage possible 100k € si on avait une prévision parfaite.

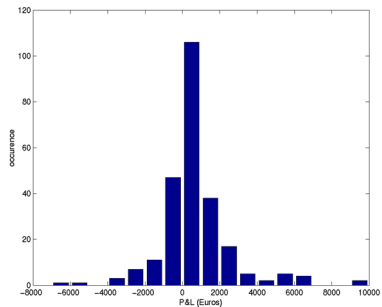


Application : trading Weak-ahead / Spot

Arbitrages saisis : 53%



Histogramme de Profit & Loss



La prévision de prix spot reste un problème difficile

Autre application : trading Spot / intraday

- ▶ **Objectif** : faire de l'arbitrage entre le produit spot et le prix intraday
 - ▶ Chaque jour t , on prévoit les prix spot et intraday du lendemain
 - ▶ Chaque jour t , on prend alors position en fonction de la différence entre ces deux prix
- ▶ **Méthodes de prévision**
 - ▶ On considère toutes les données disponibles (prévision de demande, prévision de production, température...)
 - ▶ Les modèles sont à la fois statistiques et issus du *machine learning* (réseaux de neurones)

Résultats obtenus : Bonne prise de position dans 55 à 56% des cas¹

¹ Maciejowska K · Nitka W · Weron T « Day-Ahead vs. Intraday - Forecasting the Price Spread to Maximize
O. Féron, Marchés de l'électricité

Conclusion sur l'approche statistique

- ▶ **Approche objective, traitant directement avec les données**
 - ▶ Le modèle peut être adapté aux données disponibles
 - ▶ Le modèle peut donner une mesure objective de la dépendance entre les prix et les différentes variables explicatives
- ▶ **C'est l'approche préférée (avec le machine learning) pour la prévision court terme (et les stratégies de trading)**
- ▶ **Les modèles sont souvent très complexes**
 - ▶ Issus d'une longue décomposition du signal observé pour obtenir un résidu final ayant de bonnes propriétés statistiques
 - ▶ Généralement un très grand nombre de paramètres
- ▶ **Il est nécessaire d'avoir un grand nombre de données (longs historiques)...**
 - ▶ La pertinence statistique des paramètres estimés est fonction du nombre de données
 - ▶ Il est difficile (mais pas impossible) de considérer des variables non observées
- ▶ **... ce qui peut être contradictoire avec l'hypothèse de stationnarité.**

Références I

-  Aïd, R. (2009).
Long term risk for utility companies : the next challenges.
[FiME Lab report.](#)
-  Aïd, R. (2015).
Electricity Derivatives.
[SpringerBriefs in Quantitative Finance.](#)
-  Aïd, R., Campi, L., Huu, A. N., and Touzi, N. (2009).
A structural risk neutral model of electricity prices.
[Int. Jour. of Theoretical and Applied Finance, 12\(7\) :925–947.](#)
-  Aïd, R., Campi, L., and Langrené, N. (2013).
A structural risk-neutral model for pricing and hedging power derivatives.
[Mathematical Finance, 23\(3\) :387–438.](#)
-  Alasseur, C. and Féron, O.
Structural model for coupled electricity markets.
[Energy Economics, 75\(C\) :104–119.](#)

-  Barlow, M. T. (2002).
A diffusion model for electricity prices.
[Mathematical Finance](#), 12(4) :287–298.
-  Benth, F. E., Benth, J. S., and Koekebakker, S. (2008).
Stochastic Modeling of Electricity and Related Markets.
[World Scientific Publishing Company](#).
-  Carmona, R. and Coulon, M. (2012).
A survey of commodity markets and structural models for electricity prices.
[In Financial Engineering for Energy Asset Management and Hedging in Commodity Markets; Proceedings from the special thematic year at the Wolfgang Pauli Institute](#).
-  Carmona, R., Coulon, M., and Schwarz, D. (2013).
Electricity price modeling and asset valuation : a multi-fuel structural approach.
[Mathematics and Financial Economics](#), 7(2) :167–202.

-  Cartea, A. and Villaplana, P. (2008).
Spot price modelling and the valuation of electricity forward contracts : the role of demand and capacity.
[Journal of Banking and Finance](#), 32(12) :2502–2519.
-  Cassassus, J. and Collin-Dufresne, P. (1990).
Maximal affine model of convenience yield implied from interest rates and commodity futures.
[Journal of Finance](#), XLV(3) :959–976.
-  Cortazar, G. and Schwartz, E. (1994).
The valuation of commodity-contingent claims.
[Journal of Derivatives](#), 1(4) :27–39.
-  Cortazar, G. and Schwartz, E. (2003).
Implementing a stochastic model for oil futures prices.
[Energy Economics](#), 25(3) :215–238.

-  Deschatre, T., Féron, O., and Gruet, P. (2021).
A survey of electricity spot and futures price models for risk management applications.
[preprint.](#)
-  Frestad, D., Benth, F., and Koekebakker, S. (2010).
Modeling term structure dynamics in the nordic electricity swap market.
[Energy Journal](#), 31(2) :53–86.
-  Gibson, R. and Schwartz, E. (1990).
Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims.
[Journal of Finance](#), 45(3) :959–976.
-  Heath, D., Jarrow, R., and Morton, A. (1992).
Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for
contingent claims valuation.
[Econometrica](#), 60(1) :77–105.

-  Hilliard, J. and Reis, J. (1998).
Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yield, interest rates, and jump diffusions in the spot.
[Journal of Finance and Quantitative Analysis](#), 33(1) :61–86.
-  Hinz, J., , and Wilhelm, M. (2006).
Pricing flow commodity derivatives using fixed income market techniques.
[International Journal of Theoretical and Applied Fnanace](#), 9(8) :1299–1321.
-  Hinz, J., von Grafenstein, L., and Verschuere, M. (2005).
Pricing electricity risk by interest rate methods.
[Quantitative Finance](#), 5(1) :49–60.
-  Jamshidian, F. (1992).
Commodity option evaluation in de Gaussian futures term structure model.
[Review of Futures Markets](#), 10(2) :324–346.

-  Kiesel, R., Schindlmayr, G., and Borger, R. (2009).
A two-factor model for the electricity forward market.
[Quantitative Finance](#), 9(3) :279–287.
-  Lago, J., Marcjasz, G., De Schutter, B., and Weron, R. (2021).
Forecasting day-ahead electricity prices : A review of state-of-the-art algorithms, best practices and an open-access benchmark.
[Applied Energy](#), 293 :116983.
-  Ludkovski, M. and Carmona, R. (2004).
Spot convenience yields models for energy markets.
volume 351 of [Contemporary Mathematics](#), pages 65–80.
-  Nielsen, M. and Schwartz, E. (2004).
Theory of storage and the pricing of commodity claims.
[Review of Derivatives Research](#), 7(1) :5–24.

-  Nowotarski, R. and Weron, R. (2018).
Recent advances in electricity price forecasting : A review of probabilistic forecasting.
[Renewable and Sustainable Energy Reviews](#), 81(1) :1548–1568.
-  Schwartz, E. (1997).
The stochastic behavior of commodity prices : Implications for valuation and hedging.
[The Journal of Finance](#), 52(3) :923–973.
-  Schwartz, E. and Smith, J. E. (2000).
Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices.
[Management Science](#), 46(7) :893–911.
-  Weron, R. (2014).
Electricity price forecasting : A review of the state-of-the-art with a look into the future.
[International Journal of Forecasting](#), 30(4) :1030–1081.
-  Ziel, F. (2022).
Electricity price forecasting : Data science meets fundamental models.