

Arrêt optimal et applications

Notes de cours

V. Lemaire

Février 2019.

D'après les notes de cours manuscrites de Gilles Pagès,
du cours de Damien Lambertson [[Lam09](#)],
et du livre de Goran Peskir et Albert Shiryaev [[PS06](#)].

Chapitre 1

Arrêt optimal à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration à temps discret $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. On interprète la tribu $\mathcal{F}_n$ comme l'information disponible au temps $n \geq 0$. Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$ est un *temps d'arrêt* pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ si $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêts pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et on définit

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n^N &= \{\tau \in \mathcal{T}, \mathbf{P}[n \leq \tau \leq N] = 1\} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N, \\ \mathcal{T}_n &= \{\tau \in \mathcal{T}, \mathbf{P}[n \leq \tau < \infty] = 1\} \quad \text{pour } n \geq 0.\end{aligned}$$

On considère une suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires réelles, adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, et telle que

$$\mathbf{E} \left[\sup_{n \geq 0} |Z_n| \right] < \infty. \quad (1.1)$$

Cette suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est appelée suite de gains ou de récompenses (en théorie des jeux). Un problème d'arrêt optimal s'écrit

$$\mathcal{V}^* = \sup_{\tau} \mathbf{E}[Z_{\tau}], \quad (1.2)$$

où le supremum est pris sur un ensemble de temps d'arrêts. Résoudre ce problème consiste à

- calculer / caractériser la *valeur optimale* $\mathcal{V}^*$,
- trouver un *temps d'arrêt optimal* τ^* pour lequel le sup est atteint.

Il est souvent impossible de déterminer explicitement (analytiquement) ce temps d'arrêt optimal et la valeur optimale, mais il existe des algorithmes efficaces permettant de résoudre numériquement ces problèmes.

1.1 Problème à horizon fini

Tout d'abord on s'intéresse au problème (1.2) dans le cas où le supremum est pris sur $\mathcal{T}^N$. Plus précisément on considère pour N fixé, une suite $(\mathcal{V}_n^N)_{0 \leq n \leq N}$ de fonctions valeurs définies par

$$\mathcal{V}_n^N = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathbf{E}[Z_{\tau}] \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N. \quad (1.3)$$

Voici quelques exemples pour illustrer ce problème.

Jeu Rouge/Noir

On dispose d'un jeu de 52 cartes composé de 26 cartes rouges et 26 cartes noires. Le joueur part d'une fortune initiale nulle ($Z_0 = 0$), et à l'étape $n \in \{1, \dots, 52\}$ il tire une carte et gagne +1 si la carte est noire ou perd -1 si la carte est rouge. La carte est alors retirée du jeu et le *joueur décide* de continuer le jeu ou de quitter le jeu avec sa fortune actuelle. Comment jouer "au mieux" à ce jeu ? Quelle est la valeur de ce jeu ?

Problème des secrétaires (ou de la princesse, ou du mariage, etc.)

On considère N candidats à un poste de secrétaire. On les auditionne les uns après les autres afin de choisir le meilleur. Après chaque audition on décide si on embauche ce secrétaire, ou si on essaye d'en trouver un autre meilleur. Chaque candidat a un rang intrinsèque inconnu du recruteur, de 1 pour le meilleur à N pour le moins bon. Lors d'une audition on détermine comment le candidat actuel se place parmi les précédents, c'est à dire qu'on détermine son rang relatif par rapport aux précédents et on note ce rang X_n . Ainsi $X_n = k$ signifie que le n -ième candidat a le rang k parmi les n premiers ($1 \leq k \leq n$). On suppose que les candidats arrivent au hasard. Comment choisir le meilleur ?

Options américaines dans un modèle discret

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ un actif risqué à temps discret. Un Call américain est un contrat donnant le droit (non l'obligation) d'acheter cet actif à un prix K (fixé dans le contrat et appelé *strike*) à n'importe quel instant avant N (fixé dans le contrat et appelé *maturité*). Le Put américain est un contrat similaire donnant le droit de vendre l'actif. Les prix de ces contrats, C (Call américain) et P (Put américain), sont donnés par

$$C = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \mathbf{E}[(S_\tau - K)_+],$$

$$P = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^N} \mathbf{E}[(K - S_\tau)_+],$$

où le taux d'intérêt est ici supposé nul et $\mathbf{P}$ est une probabilité bien choisie...

1.1.1 Récurrence rétrograde

Le principe de récurrence rétrograde (ou programmation dynamique) permet de résoudre le problème (1.3) en construisant une stratégie (S_n^N) définie de façon récursive à partir de la valeur de la fortune à l'instant N . En $n = N$ on doit s'arrêter et la valeur de la stratégie vaut Z_N c'est à dire $S_N^N = Z_N$. En $n = N - 1$, on peut s'arrêter ou continuer. Si on s'arrête la stratégie vaut $S_{N-1}^N = Z_{N-1}$ et si on continue la valeur S_{N-1}^N de la stratégie doit être telle que l'on ait $S_N^N = Z_N$ en N c'est à dire $S_{N-1}^N = \mathbf{E}[Z_N | \mathcal{F}_{N-1}]$. De façon itérative cela revient à construire la suite de variables aléatoires $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$ définie par

$$\begin{cases} S_N^N = Z_N & \text{condition terminale} \\ S_n^N = \max \left(Z_n, \mathbf{E} \left[S_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n \right] \right) & \text{pour } 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

On considère alors le temps d'arrêt τ_n^N défini par

$$\tau_n^N = \inf \left\{ n \leq k \leq N, S_k^N = Z_k \right\} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N. \quad (1.5)$$

Dans cette première approche à N fini, on part de l'algorithme (intuitif) (1.4) et du temps d'arrêt (1.5) puis on prouve par la théorie des martingales que cet algorithme résout bien le problème et que le temps d'arrêt est optimal.

Dans l'approche à horizon infini (Section 1.2) on fera la démarche inverse en partant de l'enveloppe de Snell (cf. définition ci-dessous) associée au problème on montrera que sa dynamique vérifie les équations similaires à (1.4) et que le temps d'arrêt optimal (s'il est fini *p.s.*) vérifie (1.5) avec $N = \infty$. On suppose dans un premier temps que l'espace de probabilité est fini ou dénombrable. Ainsi l'ensemble $\mathcal{T}_n^N$ est dénombrable et on peut considérer la variable aléatoire $\sup_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n]$.

Théorème 1.1.1 (Enveloppe de Snell) Soit $0 \leq n \leq N$ fixé. Alors on a

$$\begin{cases} S_n^N \geq \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n] & \text{pour tout } \tau \in \mathcal{T}_n^N, \\ S_n^N = \mathbf{E}[Z_{\tau_n^N} | \mathcal{F}_n], \end{cases} \quad (1.6)$$

en particulier $S_n^N = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n]$ et le sup est atteint en τ_n^N . La suite $(S_n^N)_{n \geq 0}$ est appelée enveloppe de Snell de la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$.

PREUVE La preuve se fait par récurrence rétrograde. En $n = N$, par définition $S_N^N = Z_N$ et $\tau_N^N = N$ donc (1.6) est vrai. Supposons (1.6) vrai en $n \in 1, \dots, N$ fixé, et montrons que la relation est vérifiée en $n - 1$.

Soit $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}^N$ alors

$$\mathbf{E}[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{n-1}] = Z_{n-1} \mathbf{1}_{\{\tau=n-1\}} + \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}} \mathbf{E}[Z_{\tau \vee n} \mid \mathcal{F}_{n-1}]. \quad (1.7)$$

D'une part $\tau \vee n \in \mathcal{T}_n^N$ donc par hypothèse de récurrence $\mathbf{E}[Z_{\tau \vee n} \mid \mathcal{F}_n] \leq S_n^N$ d'où (en préconditionnant)

$$\mathbf{E}[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq Z_{n-1} \mathbf{1}_{\{\tau=n-1\}} + \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}} \mathbf{E}[S_n^N \mid \mathcal{F}_{n-1}].$$

En utilisant la définition (1.4) on obtient $\mathbf{E}[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq S_{n-1}^N$ ce qui prouve la première relation.

Pour montrer la seconde relation, on remarque que $\tau_{n-1}^N = \tau_n^N$ sur $\{\tau_{n-1}^N \geq n\}$ donc d'après (1.7) on a

$$\mathbf{E}[Z_{\tau_{n-1}^N} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = Z_{n-1} \mathbf{1}_{\{\tau_{n-1}^N = n-1\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{n-1}^N \geq n\}} \mathbf{E}[Z_{\tau_n^N} \mid \mathcal{F}_{n-1}].$$

En utilisant $Z_{n-1} = S_{n-1}^N$ sur $\{\tau_{n-1}^N = n-1\}$ et $\mathbf{E}[S_n^N \mid \mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}^N$ sur $\{\tau_{n-1}^N \geq n\}$ on obtient le résultat. ■

Théorème 1.1.2 (Caractérisation) Soit $0 \leq n \leq N$ fixé. La suite $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$ est la plus petite surmartingale qui domine $(Z_k)_{n \leq k \leq N}$ et la suite arrêtée $(S_{k \wedge \tau_n^N}^N)_{n \leq k \leq N}$ est une martingale.

PREUVE Par la définition (1.4) on a clairement

$$S_k^N \geq \mathbf{E}[S_{k+1}^N \mid \mathcal{F}_k]$$

donc $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$ est une surmartingale, et toujours d'après la définition on a $S_k^N \geq Z_k$ pour tout $n \leq k \leq N$.

Soit $(\tilde{S}_k^N)_{n \leq k \leq N}$ une autre surmartingale qui domine $(Z_k)_{n \leq k \leq N}$. Notons qu'en $l = N$ on a $\tilde{S}_N^N \geq Z_N = S_N^N$. Si on suppose cette relation vraie en $l \in \{n+1, \dots, N\}$ alors on a

$$\begin{aligned} S_{l-1}^N &= \max\left(Z_{l-1}, \mathbf{E}[S_l^N \mid \mathcal{F}_{l-1}]\right) \\ &\leq \max\left(Z_{l-1}, \mathbf{E}[\tilde{S}_l^N \mid \mathcal{F}_{l-1}]\right) \leq \tilde{S}_{l-1}^N \quad p.s. \end{aligned}$$

et la relation de domination est prouvée.

Montrons que la suite arrêtée en τ_n^N est une martingale. Soit $k \in \{n, \dots, N-1\}$ fixé. Alors

$$\mathbf{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N \mid \mathcal{F}_k] = \mathbf{1}_{\{\tau_n^N \leq k\}} S_{k \wedge \tau_n^N}^N + \mathbf{1}_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} \mathbf{E}[S_{k+1}^N \mid \mathcal{F}_k]$$

D'où $\mathbf{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N \mid \mathcal{F}_k] = S_{k \wedge \tau_n^N}^N$ p.s. ■

Théorème 1.1.3 (Temps d'arrêt optimal) Le temps d'arrêt τ_n^N est un temps d'arrêt optimal dans (1.3), et c'est le plus petit p.s.

PREUVE Par définition de τ_n^N on a $Z_{\tau_n^N} = S_{\tau_n^N}^N$ donc $\mathbf{E}[Z_{\tau_n^N}] = \mathbf{E}[S_{\tau_n^N}^N]$ puis par la propriété de martingale $\mathbf{E}[S_{\tau_n^N}^N] = \mathbf{E}[S_n^N]$. Soit $\tau \in \mathcal{T}_n^N$. Comme $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$ est une surmartingale on a $\mathbf{E}[S_n^N] \geq \mathbf{E}[S_\tau^N] \geq \mathbf{E}[Z_\tau]$ (par domination). On en déduit que τ_n^N est optimal.

Soit τ^* un temps d'arrêt optimal. Alors d'après ce qui précède $\mathbf{E}[Z_{\tau_n^N}] = \mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_{\tau^*}^N]$, or $S_{\tau^*}^N \geq Z_{\tau^*}$ p.s. donc on a $S_{\tau^*}^N = Z_{\tau^*}$ p.s. et $\tau^* \geq \tau_n^N$ (par définition de τ_n^N). ■

1.1.2 Cadre Markovien

On considère maintenant une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ de noyaux de transition $(P_n)_{n \geq 0}$, et Z_n donnée par

$$\forall n \geq 0, \quad Z_n = \phi_n(X_n) \quad (1.8)$$

où pour tout $n \geq 0$, ϕ_n est une fonction mesurable positive telle que $\phi_n(X_n)$ est intégrable.

Proposition 1.1.1 *L'enveloppe de Snell de la suite $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ est donnée par*

$$S_n^N = V_n(X_n) \quad p.s. \quad (1.9)$$

où les fonctions V_n , $0 \leq n \leq N$ sont données par l'algorithme de programmation dynamique

$$\begin{cases} V_N(x) = \phi_N(x), \\ V_n(x) = \max(\phi_n(x), P_n V_{n+1}(x)), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (1.10)$$

PREUVE Il suffit de remarquer que dans le cadre markovien on a

$$\mathbf{E} [S_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n] = \mathbf{E} [V_{n+1}(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = P_n V_{n+1}(X_n) \quad p.s. \quad \blacksquare$$

Le plus petit temps d'arrêt optimal est alors donné par

$$\tau_n^N = \inf \{0 \leq n \leq N, V_n(X_n) = \phi_n(X_n)\}.$$

Dans le cadre Markovien il est utile de définir

$$\begin{aligned} C &= \{(n, x), V_n(x) > \phi_n(x)\} \text{ région de continuation,} \\ D &= \{(n, x), V_n(x) = \phi_n(x)\} \text{ région d'arrêt.} \end{aligned}$$

Lien avec le contrôle optimal et l'équation de Bellman

Il est utile de remarquer que l'algorithme (1.10) est un cas particulier d'un algorithme plus général. Considérons une chaîne de Markov contrôlée $(X_n)_{n \geq 0}$ de noyaux de transition $(P_n^{(u)})_{n \geq 0}$ où u est un contrôle dans un ensemble mesurable $(C, \mathcal{C})$. Le lien avec l'arrêt optimal se fait en considérant 2 contrôles possibles $C = \{s, c\}$, le contrôle $u = s$ pour s'arrêter (stop) et $u = c$ pour continuer. On note $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite de contrôles, c'est à dire une suite de v.a. telle que

$$\forall n \geq 0, \quad U_n = \nu_n(X_0, \dots, X_n) \quad (1.11)$$

avec ν_n une application mesurable à valeur dans C . Le problème général que l'on peut traiter avec la programmation dynamique (principe d'optimalité de Bellman) est le suivant : étant donné un horizon $N \geq 1$, des fonctions de gains g_k , $k = 0, \dots, N-1$ et γ_N on cherche

$$G(x) = \max_{\nu=(\nu_0, \dots, \nu_{N-1})} \mathbf{E}_{x, \nu} \left[\sum_{k=0}^{N-1} g_k(X_k, U_k) + \gamma_N(X_N) \right]. \quad (1.12)$$

Dans la suite on suppose que toutes les quantités sont bien définies et que les v.a. sont intégrables.

Théorème 1.1.4 *On considère les fonctions G_n , $0 \leq n \leq N$ données par*

$$\begin{cases} G_N(x) = \gamma_N(x), \\ G_n(x) = \max_{u \in C} (g_n(x, u) + P_n^{(u)} G_{n+1}(x)), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (1.13)$$

On note $\nu_n^*(x)$ le contrôle réalisant le max pour un $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Alors $G_0(x) = G(x)$ et $U_n = \nu_n^*(X_n)$ est la stratégie optimale.

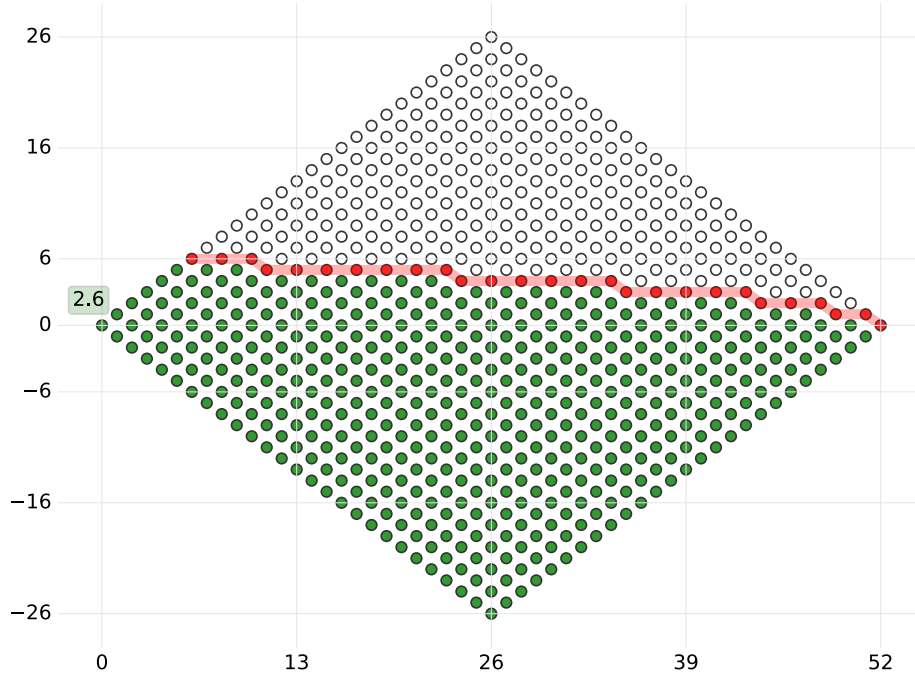


FIGURE 1.2 – Jeu « red/black » avec 52 cartes dont 26 cartes noires. Les points représentent le domaine $(n, \phi_n(x))$ avec la région de continuation en vert et la région d'arrêt en rouge.

Le problème des secrétaires

Soit X_n le rang relatif du n -ième candidat (parmi N candidats). Alors les v.a. X_n sont indépendantes et X_n est uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Les fonctions de gains ϕ_n sont données par $\phi_n(x) = \frac{n}{N} \mathbf{1}_{\{x=1\}}$ (pourquoi?). Le résultat numérique de l'algorithme de programmation dynamique est représenté dans la Figure 1.1.3.

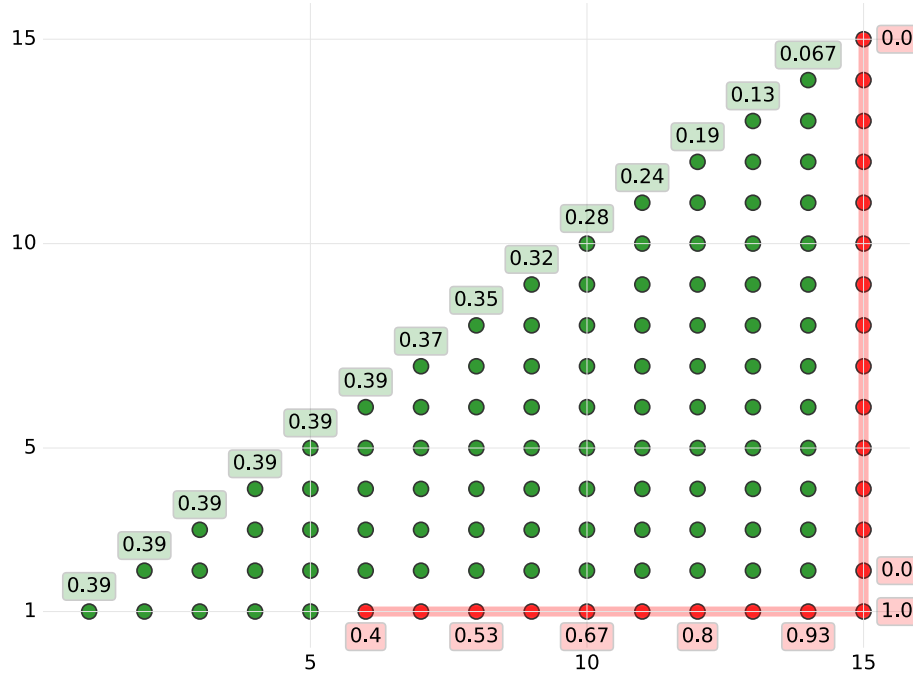


FIGURE 1.3 – Représentation des fonctions valeurs du problème des secrétaires. Les points représentent le domaine (n, x) avec la région de continuation en vert et la région d'arrêt en rouge.

1.2 Problème à horizon infini

Il s'agit maintenant de considérer le problème à temps discret mais d'horizon infini c'est à dire

$$V^* = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Z_\tau], \quad (1.14)$$

où $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.a. réelles, adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et vérifiant (1.1). Dans la section précédente où l'horizon est fini $N < \infty$ on a utilisé la condition terminale et la récurrence rétrograde pour résoudre le problème en un sens stochastique : construction du processus $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$ et on a montré que ce processus était l'enveloppe de Snell du processus $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ i.e. $S_n^N = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n^N} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n]$. Dans cette section on procède différemment en étudiant les propriétés de l'enveloppe de Snell du processus $(Z_n)_{n \geq \mathbf{N}}$. Pour définir ce processus il faut considérer le “sup” d'une famille de v.a. $(Z_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}_n}$ possiblement non dénombrable.

1.2.1 Borne supérieure essentielle

La notion de borne supérieure essentielle permet de considérer le “sup” d'une famille non dénombrable de variables aléatoires. La définition est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 (Essential supremum) *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par un ensemble I donné (dénombrable ou non). Alors il existe un sous-ensemble dénombrable $J^* \subset I$ tel que la variable aléatoire $\bar{X} = \sup_{j \in J^*} X_j$ vérifie les propriétés suivantes*

1. *pour tout $i \in I$, $X_i \leq \bar{X}$ p.s.*
2. *si X est une v.a. telle que $X_i \leq X$ p.s. pour tout $i \in I$, alors $\bar{X} \leq X$ p.s.*

Cette variable aléatoire $\bar{X}$ est notée $\text{ess sup}_{i \in I} X_i$ et appelée borne supérieure essentielle de la famille $(X_i)_{i \in I}$.

La variable aléatoire $\text{ess sup}_{i \in I} X_i$ est donc la plus petite v.a. majorant la famille $(X_i)_{i \in I}$.

PREUVE On suppose les v.a. X_i à valeurs dans $[0, 1]$ (quitte à considérer une bijection de $\bar{R}$ dans $[0, 1]$). Pour un sous-ensemble dénombrable $J \subset I$ on pose $\bar{X}_J = \sup_{j \in J} X_j$ qui est bien une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des sous-ensembles dénombrables de I et

$$\alpha = \sup_{J \in \mathcal{J}} \mathbf{E} [\bar{X}_J].$$

On considère alors une suite $(J_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{J}$ telle que $\lim_n \mathbf{E} [\bar{X}_{J_n}] = \alpha$. La réunion $J^* = \bigcup_{n \geq 0} J_n$ est un élément de $\mathcal{J}$ tel que $\alpha = \mathbf{E} [\bar{X}_{J^*}]$ (par convergence monotone). On note alors $\bar{X} = \bar{X}_{J^*}$. Montrons les propriétés 1. et 2.

Soit $i \in I$. Alors $J^* \cup \{i\}$ est un sous-ensemble dénombrable de I et $\bar{X}_{J^* \cup \{i\}} = \bar{X}_{J^*} \vee X_i$. Ainsi $\mathbf{E} [\bar{X}_{J^*}] = \alpha \geq \mathbf{E} [\bar{X}_{J^*} \vee X_i]$ d'où l'on déduit que $\bar{X}_{J^*} \vee X_i = \bar{X}_{J^*}$ i.e. $X_i \leq \bar{X}$ p.s.

Soit X une v.a. telle que $X_i \leq X$ p.s. pour tout $i \in I$. Comme J^* est dénombrable on a $X \geq \sup_{i \in J^*} X_i = \bar{X}$ p.s. ■

Proposition 1.2.1 *Si la famille $(X_i)_{i \in I}$ est un demi-treillis supérieur i.e.*

$$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad X_i \vee X_j \leq X_k \quad \text{p.s.} \quad (1.15)$$

alors il existe une suite d'indices $(i_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $(X_{i_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante p.s. et $\text{ess sup}_{i \in I} X_i = \sup_{n \in \mathbf{N}} X_{i_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{i_n}$ p.s.

PREUVE Soit $(j_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'indices telle que $\text{ess sup}_{i \in I} X_i = \sup_{n \in \mathbf{N}} X_{j_n}$ ($(j_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est obtenue en énumérant les éléments de J^*). On construit alors une suite d'indices $(i_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $X_{i_n} = \max(X_{j_0}, \dots, X_{j_n}, X_{i_{n-1}})$ p.s. ■

Proposition 1.2.2 *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a. positives vérifiant (1.15). Alors*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\text{ess sup}_{i \in I} X_i \right] &= \sup_{i \in I} \mathbf{E} [X_i], \\ \forall \mathcal{B} \subset \mathcal{F}, \quad \mathbf{E} \left[\text{ess sup}_{i \in I} X_i \mid \mathcal{B} \right] &= \text{ess sup}_{i \in I} \mathbf{E} [X_i \mid \mathcal{B}] \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

Le résultat est vrai pour une famille de v.a. uniformément intégrable.

1.2.2 Enveloppe de Snell

Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ une suite adaptée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ telle que $\mathbf{E} [\sup_{n \geq 0} |Z_n|] < \infty$. On définit l'enveloppe de Snell de $(Z_n)_{n \geq 0}$ par la suite $(S_n)_{n \geq 0}$

$$S_n = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{E} [Z_\tau \mid \mathcal{F}_n]. \quad (1.16)$$

On rappelle que $\mathcal{T}_n$ correspond à l'ensemble des temps d'arrêt dans $[n, +\infty[$ p.s. On vérifie aisément que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est uniformément intégrable. D'autre part, pour $n \geq 0$ fixé on vérifie que la famille

$$(X_i)_{i \in I} = (\mathbf{E} [Z_\tau \mid \mathcal{F}_n])_{\tau \in \mathcal{T}_n}$$

est un demi-treillis supérieur i.e. satisfait (1.15). En effet pour $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_n$ on pose $\tau = \tau_1 \mathbf{1}_A + \tau_2 \mathbf{1}_{A^c}$ avec $A = \{\mathbf{E} [Z_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_n] \geq \mathbf{E} [Z_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_n]\}$. Alors $\tau \in \mathcal{T}_n$ et

$$\mathbf{E} [Z_\tau \mid \mathcal{F}_n] = \max(\mathbf{E} [Z_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_n], \mathbf{E} [Z_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_n])$$

Théorème 1.2.2 *Soit $n \geq 0$ fixé. L'enveloppe de Snell définie en (1.16) vérifie la dynamique*

$$S_n = \max(Z_n, \mathbf{E} [S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) \quad \text{p.s.}$$

et $\mathbf{E} [S_n] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{E} [Z_\tau]$.

PREUVE Le fait que $\mathbf{E}[S_n] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{E}[Z_\tau]$ découle simplement de la Proposition 1.2.2.

On commence par prouver que $S_n \leq \max(Z_n, \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n])$ p.s.

Soit $\tau \in \mathcal{T}_n$, alors

$$\mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n] = Z_n \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \mathbf{E}[Z_{\tau \vee (n+1)} | \mathcal{F}_n]$$

Or $\tau \vee (n+1) \in \mathcal{T}_{n+1}$ donc $\mathbf{E}[Z_{\tau \vee (n+1)} | \mathcal{F}_{n+1}] \leq S_{n+1}$ et $\mathbf{E}[Z_{\tau \vee (n+1)} | \mathcal{F}_n] \leq \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ p.s. En prenant l'ess sup on obtient l'inégalité annoncée.

Montrons l'inégalité inverse. Tout d'abord, il est clair que $Z_n \leq S_n$ p.s. par définition de l'ess sup. Il reste à montrer la propriété de surmartingale de $(S_n)_{n \geq 0}$ i.e. $S_n \geq \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ p.s. D'après la Proposition 1.2.2

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E} \left[\operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{n+1}} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_{n+1}] \middle| \mathcal{F}_n \right], \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{n+1}} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n], \quad \text{p.s.} \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n] = S_n \end{aligned}$$

car $\mathcal{T}_{n+1} \subset \mathcal{T}_n$. ■

Proposition 1.2.3 *L'enveloppe de Snell $(S_n)_{n \geq 0}$ définie en (1.16) est la plus petite surmartingale qui domine $(Z_n)_{n \geq 0}$ et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \quad \text{p.s.}$$

PREUVE Dans la proposition précédente on a montré la propriété de surmartingale de $(S_n)_{n \geq 0}$. Montrons qu'elle est la plus petite. Soit $(\tilde{S}_n)_{n \geq 0}$ une autre surmartingale qui domine $(Z_n)_{n \geq 0}$. Alors,

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_n, \quad \tilde{S}_\tau \geq Z_\tau \quad \text{p.s.}$$

Par le théorème d'arrêt appliqué avec les temps d'arrêts bornés n et $\tau \wedge N$ ($N \geq n$) et la surmartingale $(\tilde{S}_n)_{n \geq 0}$ on a

$$\tilde{S}_n \geq \mathbf{E}[\tilde{S}_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_n] \geq \mathbf{E}[Z_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_n] \quad \text{p.s.}$$

Comme $\mathbf{E}[\sup_{n \geq 0} |Z_n|] < \infty$ on a par Fatou conditionnel $\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Z_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_n] \geq \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n]$ et en prenant l'ess sup on obtient le résultat $\tilde{S}_n \geq S_n$ p.s..

La surmartingale $(S_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathbf{L}^1$ donc converge p.s. vers une v.a. S_∞ intégrable et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty \quad \text{p.s.}$$

L'inégalité inverse s'obtient en remarquant que

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_n, \quad \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_n] \leq \mathbf{E} \left[\sup_{p \geq n} Z_p \middle| \mathcal{F}_n \right],$$

et donc $S_n \leq \mathbf{E}[\sup_{p \geq n} Z_p | \mathcal{F}_n]$. En prenant l'espérance on en déduit $\mathbf{E}[S_n] \leq \mathbf{E}[\sup_{p \geq n} Z_p]$ et par convergence dominée $\mathbf{E}[S_\infty] \leq \mathbf{E}[\limsup_n Z_n]$. Ainsi $(S_\infty - \limsup_n Z_n)$ est une v.a. positive d'espérance négative et donc nulle p.s. ■

1.2.3 Temps d'arrêt optimal

Théorème 1.2.3 (Caratérisation et existence) *Un temps d'arrêt $\tau^* \in \mathcal{T}_0$ est optimal si et seulement si*

$$S_{\tau^*} = Z_{\tau^*} \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad (S_{\tau^* \wedge n})_{n \geq 0} \text{ est une martingale.}$$

Soit

$$\tau_0 = \inf \{n \geq 0, S_n = Z_n\}.$$

Il existe un temps d'arrêt optimal si et seulement si $\tau_0 < \infty$ p.s., et dans ce cas τ_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal p.s.

PREUVE On rappelle que $\tau^* \in \mathcal{T}_0$ est dit optimal s'il réalise le sup dans (1.14) i.e. s'il vérifie $\mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Z_\tau]$, et donc d'après le Théorème 1.2.2 si $\mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_0]$. De plus $(S_n)_{n \geq 0}$ est une surmartingale qui converge dans $\mathbf{L}^1$ donc pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0$, $\mathbf{E}[S_\tau] \leq \mathbf{E}[S_0]$ et comme S domine Z , $\mathbf{E}[Z_\tau] \leq \mathbf{E}[S_\tau]$. Ainsi τ^* est optimal si et seulement si

$$\mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_0].$$

De $\mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_{\tau^*}]$ on en déduit $Z_{\tau^*} = S_{\tau^*}$ p.s. (car S domine Z). La réciproque est évidente.

De $\mathbf{E}[S_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_0]$ on en déduit que $(S_{\tau^* \wedge n})_{n \geq 0}$ est une martingale. Par le théorème d'arrêt appliqué à la surmartingale $(S_n)_{n \geq 0}$ uniformément intégrable, on a $\mathbf{E}[S_0] = \mathbf{E}[S_{\tau^* \wedge n}] = \mathbf{E}[S_{\tau^*}]$ pour tout $n \geq 0$. En particulier $\mathbf{E}[S_{\tau^* \wedge (n+1)}] = \mathbf{E}[S_{\tau^* \wedge n}]$ et d'après le Théorème 1.2.2 $S_{\tau^* \wedge n} \geq \mathbf{E}[S_{\tau^* \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n]$ p.s. d'où l'égalité p.s. et la propriété de martingale. La réciproque est évidente.

Soit $\tau_0 = \inf \{n \geq 0, S_n = Z_n\}$. On vient de montrer que s'il existe $\tau^* \in \mathcal{T}_0$ optimal alors $S_{\tau^*} = Z_{\tau^*}$ p.s. donc il est clair que τ_0 est optimal et que c'est le plus petit des temps d'arrêts optimaux. Montrons maintenant que si $\tau_0 < \infty$ p.s. alors $(S_{\tau_0 \wedge n})_{n \geq 0}$ est une martingale. On a

$$\mathbf{E}[S_{\tau_0 \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n] = \sum_{k=0}^n S_k \mathbf{1}_{\{\tau_0 = k\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n],$$

or sur $\{\tau_0 \geq n+1\}$, $S_n > Z_n$ p.s. et donc $S_n = \mathbf{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ d'où le résultat. ■

Il est possible de caractériser le plus grand temps d'arrêt optimal. Pour cela on rappelle la décomposition de Doob d'une surmartingale intégrable.

Théorème 1.2.4 (Décomposition de Doob) Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une surmartingale intégrable. Il existe une martingale $(M_n)_{n \geq 0}$ et un processus prévisible $(A_n)_{n \geq 0}$ croissant, nul en 0, tel que

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = M_n - A_n.$$

Cette décomposition est unique à l'indistinguabilité près.

Théorème 1.2.5 Soit

$$\tau_{\max} = \inf \{n \geq 0, A_{n+1} > 0\}$$

Tout temps d'arrêt optimal est plus petit que $\tau_{\max}$ et si $\tau_{\max} < +\infty$ p.s. alors $\tau_{\max}$ est le plus grand temps d'arrêt optimal.

PREUVE Soit τ^* un temps d'arrêt optimal et $n \geq 0$. Alors par la propriété de martingale $\mathbf{E}[S_{\tau^* \wedge n}] = \mathbf{E}[S_0]$, et par la décomposition de Doob

$$\mathbf{E}[S_{\tau^* \wedge n}] = \mathbf{E}[M_{\tau^* \wedge n}] - \mathbf{E}[A_{\tau^* \wedge n}] = \mathbf{E}[S_0] - \mathbf{E}[A_{\tau^* \wedge n}].$$

Donc $\mathbf{E}[A_{\tau^* \wedge n}] = 0$ et par convergence monotone $A_{\tau^*} = 0$ p.s. donc $\tau^* \leq \tau_{\max}$.

Si $\tau_{\max}$ est fini p.s. alors $S_{\tau_{\max} \wedge n} = M_{\tau_{\max} \wedge n}$ et donc $(S_{\tau_{\max} \wedge n})_{n \geq 0}$ est une martingale. D'autre part sur $\{\tau_{\max} = j\}$ on a $S_j = M_j$ et $\mathbf{E}[S_{j+1} | \mathcal{F}_j] = M_j - A_{j+1} < S_j$ et donc $S_j = Z_j$, d'où $S_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$ p.s. ■

Chapitre 2

Arrêt optimal à temps continu

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace de probabilité muni d'une filtration à temps continu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. La filtration est supposée vérifier les *conditions usuelles*, elle donc continue à droite (*càd*) et complète (la tribu $\mathcal{A}$ est complète et $\mathcal{F}_t$ contient tout ensemble négligeable dans $\mathcal{A}$ ¹).

Un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.

Comme dans le cas discret, on introduit $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêts par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et les sous-ensembles

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_t^T &= \{\tau \in \mathcal{T}, \mathbf{P}[t \leq \tau \leq T] = 1\} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{T}_t &= \{\tau \in \mathcal{T}, \mathbf{P}[t \leq \tau < \infty] = 1\} \quad \text{pour } t \geq 0.\end{aligned}$$

2.1 Préliminaires

On rappelle quelques résultats sur les surmartingales à temps continu qu'on peut trouver avec les preuves dans [?, RW00b, RW00a].

Théorème 2.1.1 (Régularisation) *Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ une surmartingale intégrable. Si $t \mapsto \mathbf{E}[S_t]$ est continue à droite (*càd*) alors le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ a une modification *càdlàg*, appelée régularisée à droite, qui est une surmartingale (par rapport à la même filtration).*

Théorème 2.1.2 (D'arrêt) *Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ une surmartingale continue à droite, positive (ou uniformément intégrable). La limite $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t$ existe p.s. et dans $\mathbf{L}^1$, et pour tout temps d'arrêt $\sigma \leq \tau$ on a*

$$\mathbf{E}[S_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \leq S_\sigma \quad \text{p.s.}$$

Définition 2.1.1 (Classe (D)) *Un processus adapté continu à droite $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit de classe (D) si la famille $(X_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}_t}$ est uniformément intégrable.*

Théorème 2.1.3 (Décomposition de Doob-Meyer) *Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ une surmartingale continue à droite de classe (D). Il existe une martingale $(M_t)_{t \geq 0}$ et un processus prévisible croissant $(A_t)_{t \geq 0}$, nul en 0, tels que*

$$\forall t \geq 0, \quad S_t = M_t - A_t.$$

Cette décomposition est unique à l'indistinguabilité près.

1. Pour plus de détails et des commentaires éclairants consulter par exemple le polycopié de Jean Jacod (pages 17–25) : <http://www.proba.jussieu.fr/cours/DEA-07.pdf>

2.2 Enveloppe de Snell

Dans ce chapitre on suppose que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté continu à droite tel que

$$\forall t \geq 0, \quad Z_t \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \left[\sup_{t \geq 0} Z_t \right] < \infty.$$

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$\forall t \geq 0, \quad S_t = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t]. \quad (2.1)$$

La famille $(\mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t])_{\tau \in \mathcal{T}_t}$ vérifie la propriété de demi-treillis supérieur

$$\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_t, \quad \exists \tau \in \mathcal{T}_t, \quad \mathbf{E}[Z_{\tau_1} | \mathcal{F}_t] \vee \mathbf{E}[Z_{\tau_2} | \mathcal{F}_t] \leq \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t],$$

en considérant par exemple $\tau = \tau_1 \mathbf{1}_A + \tau_2 \mathbf{1}_{A^c}$. Cette propriété permet notamment d'utiliser la Proposition 1.2.2 permettant d'échanger $\operatorname{ess\,sup}$ et espérance ou espérance conditionnelle.

Théorème 2.2.1 *Le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ est une surmartingale, telle que $\mathbf{E}[S_t] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[Z_\tau]$, qui admet une régularisation à droite. Le processus régularisé à droite (càdlàg) est la plus petite surmartingale qui domine $(Z_t)_{t \geq 0}$, est de classe (D), et est appelée enveloppe de Snell de $(Z_t)_{t \geq 0}$.*

PREUVE Montrons (comme dans le cas discret) que $(S_t)_{t \geq 0}$ est une surmartingale. Soit $0 \leq s \leq t$, alors

$$\mathbf{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[\mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_s] \leq S_s \quad p.s.$$

Par la Proposition 1.2.2 on a $\mathbf{E}[S_t] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[Z_\tau]$.

Montrons maintenant l'existence d'une régularisée à droite. Il suffit de montrer que $t \mapsto \mathbf{E}[S_t]$ est continue à droite. Soit $t \geq 0$ fixé et $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante vers t . Alors comme $\mathcal{T}_t \subset \mathcal{T}_{t_n}$

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{E}[S_{t_n}] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t_n}} \mathbf{E}[Z_\tau] \leq \mathbf{E}[S_t].$$

D'autre part, pour $\tau \in \mathcal{T}_t$, comme Z est càd on a $\lim_n Z_{\tau \vee t_n} = Z_\tau$ et par Fatou

$$\mathbf{E}[Z_\tau] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Z_{\tau \vee t_n}].$$

De plus S domine Z qui est une surmartingale $\mathbf{E}[S_{\tau \vee t_n}] \leq \mathbf{E}[S_{t_n}]$ d'où

$$\mathbf{E}[Z_\tau] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_{t_n}].$$

On conclut en prenant le sup sur $\mathcal{T}_t$.

Soit $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ une surmartingale càd qui domine $(Z_t)_{t \geq 0}$. Alors

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_t, \quad \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t] \leq \mathbf{E}[\tilde{S}_\tau | \mathcal{F}_t] \leq \tilde{S}_t \quad p.s.$$

et donc $S_t \leq \tilde{S}_t$ p.s. ■

Proposition 2.2.1 *L'enveloppe de Snell $(S_t)_{t \geq 0}$ de $(Z_t)_{t \geq 0}$ vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = \limsup_{t \rightarrow \infty} Z_t \quad p.s.$$

2.3 Temps d'arrêt optimal

On commence par prouver le théorème suivant qui caractérise un temps d'arrêt optimal. L'énoncé et la preuve sont similaires à la première partie du Théorème 1.2.3 à temps discret.

Théorème 2.3.1 (Caractérisation) *Un temps d'arrêt $\tau^* \in \mathcal{T}_0$ est optimal si et seulement si*

$$S_{\tau^*} = Z_{\tau^*} \quad p.s. \quad \text{et} \quad (S_{\tau^* \wedge t})_{t \geq 0} \text{ est une martingale.}$$

PREUVE La preuve est similaire à la première partie du Théorème 1.2.3. Par domination de S sur Z et la propriété de surmartingale, $\tau^* \in \mathcal{T}_0$ est un temps d'arrêt optimal si et seulement

$$\mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_0].$$

L'égalité $\mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_{\tau^*}]$ est équivalente à $Z_{\tau^*} = S_{\tau^*}$ p.s. et l'égalité $\mathbf{E}[S_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_0]$ est équivalente à la propriété de martingale de $(S_{\tau^* \wedge t})_{t \geq 0}$. ■

Théorème 2.3.2 (Existence et identification de temps optimaux) *Si le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est quasi continue à gauche (qcàg) en espérance, alors son enveloppe de Snell est qcàg en espérance.*

La décomposition de Doob-Meyer de S s'écrit $S_t = M_t - A_t$ où $(A_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté croissant et continu, nul en 0.

On considère les temps d'arrêts

$$\tau_0 = \inf \{t \geq 0, S_t = Z_t\} \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = \inf \{t \geq 0, A_t > 0\} \quad (2.2)$$

Il existe un temps d'arrêt optimal si et seulement si $\tau_0 < \infty$ p.s., et dans ce cas τ_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal p.s. Tout temps d'arrêt optimal est plus petit que $\tau_{\max}$ et si $\tau_{\max} < \infty$ p.s. alors $\tau_{\max}$ est le plus grand temps d'arrêt optimal.

La preuve de ce résultat diffère un peu de la preuve à temps discret et nécessite de la régularité sur le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$. On suppose notamment que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est quasi continu à gauche en espérance c'est à dire

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_0, \quad \forall (\tau_n)_{n \geq 0} \text{ t.q. } \begin{cases} \tau_n \in \mathcal{T}_0, \tau_{n+1} \geq \tau_n \\ \lim_n \tau_n = \tau \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_n \mathbf{E}[Z_{\tau_n}] = \mathbf{E}[Z_\tau]. \quad (2.3)$$

On dit aussi que le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est régulier. Cette hypothèse est nécessaire pour l'existence de temps d'arrêts optimaux (cf. schémas au tableau dans le cas déterministe).

Avant de prouver ce théorème on introduit la notion de temps d'arrêt ε -optimaux. Pour $t \geq 0$ on pose

$$\forall \varepsilon > 0, \quad T_t^\varepsilon = \inf \{s \geq t, Z_s \geq S_s - \varepsilon\}, \\ T_t^0 = \inf \{s \geq t, Z_s = S_s\}.$$

Proposition 2.3.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, les processus $(A_{T_t^\varepsilon})_{t \geq 0}$ et $(A_t)_{t \geq 0}$ sont indistinguables.*

Si $(S_t)_{t \geq 0}$ est qcàg en espérance, les processus $(A_{T_t^0})_{t \geq 0}$ et $(A_t)_{t \geq 0}$ sont indistinguables.

PREUVE Admis. Cf. lemme 2.3.4 et 2.3.7 dans [Lam09]. ■

PREUVE (DU THÉORÈME 2.3.2)

• Montrons que S vérifie (2.3). Soit $\tau \in \mathcal{T}_0$ et $(\tau_n)_{n \geq 0}$ une suite de temps d'arrêt qui croît vers τ . Comme S est une surmartingale alors $\lim_n \mathbf{E}[S_{\tau_n}] \geq \mathbf{E}[S_\tau]$. D'autre part, soit $\varepsilon > 0$ et

$$T_{\tau_n}^\varepsilon = \inf \{s \geq \tau_n, Z_s \geq S_s - \varepsilon\}.$$

D'après la Proposition 2.3.1 on a $A_{T_{\tau_n}^\varepsilon} = A_{\tau_n}$ d'où

$$\mathbf{E}[S_{T_{\tau_n}^\varepsilon}] = \mathbf{E}[S_{\tau_n}] \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[Z_{T_{\tau_n}^\varepsilon}] \geq \mathbf{E}[S_{T_{\tau_n}^\varepsilon}] - \varepsilon.$$

Soit $\tau^\varepsilon = \lim_n T_{\tau_n}^\varepsilon$ temps d'arrêt (limite croissante). De la relation $\tau_n \leq T_{\tau_n}^\varepsilon \leq T_\tau^\varepsilon$ on en déduit $\tau \leq \tau^\varepsilon \leq T_\tau^\varepsilon$. Comme $(Z_t)_{t \geq 0}$ est *qcàg* en espérance on a

$$\mathbf{E}[Z_{\tau^\varepsilon}] = \lim_n \mathbf{E}[Z_{T_{\tau_n}^\varepsilon}],$$

et comme S est une surmartingale qui domine Z on a $\mathbf{E}[S_\tau] \geq \mathbf{E}[S_{\tau^\varepsilon}] \geq \mathbf{E}[Z_{\tau^\varepsilon}]$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{E}[S_\tau] \geq \lim_n \mathbf{E}[S_{T_{\tau_n}^\varepsilon}] - \varepsilon \geq \mathbf{E}[S_{\tau_n}] - \varepsilon.$$

En prenant la limite lorsque ε tend vers 0, on obtient la régularité de $(S_t)_{t \geq 0}$.

- Montrons que A est continu. Soit $\tau \in \mathcal{T}_0$ et $(\tau_n)_{n \geq 0}$ une suite de temps d'arrêt qui croît vers τ . Par décomposition de Doob-Meyer, on déduit de $\mathbf{E}[S_\tau] = \lim_n \mathbf{E}[S_{\tau_n}]$ que $\mathbf{E}[A_\tau] = \lim_n \mathbf{E}[A_{\tau_n}]$. Par croissance de A on déduit par convergence monotone $\mathbf{E}[A_\tau] = \mathbf{E}[\lim_n A_{\tau_n}]$ et donc $A_\tau = \lim_n A_{\tau_n}$ *p.s.*
- Par le théorème de caractérisation des temps d'arrêts optimaux (Théorème 2.3.1) on sait que s'il existe un temps optimal alors $\tau_0 < \infty$ *p.s.*. Supposons maintenant $\tau_0 < \infty$ avec probabilité 1 et soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante vers 0. Alors $T_0^{\varepsilon_n}$ croît vers une limite $\tau^* \leq \tau_0$ qui est un temps d'arrêt et comme

$$\mathbf{E}[S_0] = \mathbf{E}[S_{T_0^{\varepsilon_n}}] \leq \mathbf{E}[Z_{T_0^{\varepsilon_n}}] + \varepsilon_n,$$

en prenant la limite en n on obtient $\mathbf{E}[S_{\tau^*}] \leq \mathbf{E}[Z_{\tau^*}]$ et donc l'optimalité du temps τ^* . Par définition de τ_0 on a donc $\tau^* = \tau_0$.

- Si τ^* est un temps d'arrêt optimal alors $\mathbf{E}[S_{\tau^*}] = \mathbf{E}[S_0]$ et donc $\mathbf{E}[A_{\tau^*}] = 0$ et donc $\tau^* \leq \tau_{\max}$ *p.s.* On suppose $\tau_{\max} < \infty$ avec probabilité 1 et soit $T_{\tau_{\max}}^0 = \inf\{s \geq \tau_{\max}, Z_s = S_s\}$. Alors $T_{\tau_{\max}}^0 \geq \tau_{\max}$ et d'après la Proposition 2.3.1 on a $A_{T_{\tau_{\max}}^0} = A_{\tau_{\max}}$ d'où

$$\mathbf{E}[S_{T_{\tau_{\max}}^0}] = \mathbf{E}[S_{\tau_{\max}}] \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[Z_{T_{\tau_{\max}}^0}] = \mathbf{E}[S_{T_{\tau_{\max}}^0}],$$

c'est à dire $T_{\tau_{\max}}^0$ est optimal et donc $T_{\tau_{\max}}^0 = \tau_{\max}$. ■

2.4 Horizon fini

Soit T un horizon fixé et un processus de gain $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui est supposé positif, *càdlàg* adapté, *qcàg* en espérance (régulier) et tel que $\mathbf{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} Z_t] < \infty$. On définit l'enveloppe de Snell d'horizon T de $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus $(S_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$S_t^T = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t].$$

En particulier on a $S_T^T = Z_T$ *p.s.* et le temps d'arrêt $\tau_0 = \inf\{t \geq 0, S_t^T = Z_t\}$ est le plus petit temps d'arrêt optimal. Il est possible de caractériser l'enveloppe de Snell à partir de la décomposition de Doob-Meyer d'une surmartingale intégrable.

Théorème 2.4.1 *Soit $(\bar{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ une surmartingale càdlàg de classe (D) de décomposition $\bar{S} = \bar{M} - \bar{A}$. Alors $\bar{S}$ est l'enveloppe de Snell d'horizon T de Z si et seulement si*

- $\bar{S} \geq Z$
- $\bar{S}_T = Z_T$ *p.s.*
- pour tout $t \in [0, T]$, $\bar{A}_t = \bar{A}_{\bar{\tau}_t}$ où $\bar{\tau}_t = \inf\{s \geq t, \bar{S}_s = Z_s\}$.

PREUVE Si $\bar{S}$ vérifie ces conditions alors c'est une surmartingale qui domine Z et donc $\bar{S} \geq S$ *p.s.*. De plus, la condition $\bar{A}_t = \bar{A}_{\bar{\tau}_t}$ implique $\mathbf{E}[\bar{S}_t] = \mathbf{E}[\bar{S}_{\bar{\tau}_t}] = \mathbf{E}[Z_{\bar{\tau}_t}]$ et donc $\mathbf{E}[\bar{S}_t] \leq \mathbf{E}[S_t]$ puis $\bar{S} = S$ *p.s.*

La réciproque est triviale. ■

2.5 Approche duale

Le problème d'arrêt optimal peut s'écrire comme un problème d'optimisation linéaire (on cherche la plus petite surmartingale qui maximise une fonction donnée). Pour formuler un problème dual on part de la remarque suivante : le temps $\tau_0 = \inf \{t \geq 0, S_t = Z_t\}$ est optimal et $S \geq Z$ donc

$$\sup_t (Z_t - S_t) = 0.$$

De cette relation on en déduit

$$\inf_{\tilde{S}} \mathbf{E} \left[\sup_t (Z_t - \tilde{S}_t) \right] = 0.$$

où l'inf sur toutes les surmartingales $\tilde{S}$ qui dominent Z et de condition initiale $\mathbf{E}[\tilde{S}_0] = \mathbf{E}[S_0] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Z_\tau]$. Comme $(S_{\tau^* \wedge t})_{t \geq 0}$ est un martingale on peut prendre l'inf sur les martingales. L'énoncé précis à horizon fini du problème dual introduit dans [Rog02, HK04] est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.5.1 *Soit $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus supposé positif, càdlàg adapté, qcàg en espérance (régulier) et tel que $\mathbf{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} Z_t] < \infty$. Alors*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^T} \mathbf{E}[Z_\tau] = \inf_{M \in \mathcal{M}_0} \mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} (Z_s - M_s) \right],$$

où $\mathcal{M}_0$ est l'ensemble de martingales $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ càd nulle en 0.

PREUVE Soit $M \in \mathcal{M}_0$. Alors pour tout $\tau \in \mathcal{T}_0^T$ on a

$$\mathbf{E}[Z_\tau] = \mathbf{E}[Z_\tau - M_\tau] \leq \mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} (Z_s - M_s) \right]$$

et

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^T} \mathbf{E}[Z_\tau] \leq \inf_{M \in \mathcal{M}_0} \mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} (Z_s - M_s) \right]$$

Soit $(S_t^T)_{0 \leq t \leq T}$ l'enveloppe de Snell d'horizon T de $(Z_t)_{t \geq 0}$ et sa décomposition de Doob-Meyer $S_t^T = M_t - A_t$. Le processus recentré $\tilde{M} = M - M_0$ est dans $\mathcal{M}_0$ et $S_t^T = S_0^T + \tilde{M}_t - A_t$ d'où $S_0^T \geq Z_t - \tilde{M}_t$ et

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^T} \mathbf{E}[Z_\tau] = \mathbf{E}[S_0^T] \geq \mathbf{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} (Z_s - \tilde{M}_s) \right] \quad \blacksquare$$

Chapitre 3

Options américaines

3.1 Cadre général

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel on considère un mouvement brownien standard $(W_t)_{t \geq 0}$ et sa filtration naturelle (complétée) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Sur cet espace on considère un marché financier sur $[0, T]$ composé d'un actif sans risque $(\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dirigé par un taux d'intérêt instantané $(r_t)_{t \in [0, T]}$ et un actif risqué $(X_t)_{t \in [0, T]}$ suivant l'évolution d'un $\mathbf{P}$ -mouvement Brownien $(W_t)_{t \in [0, T]}$. Plus précisément on suppose

$$\begin{aligned} d\beta_t &= r_t \beta_t dt, \quad \beta_0 \geq 0, \\ \frac{dX_t}{X_t} &= \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad X_0 > 0, \end{aligned}$$

où $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$ et $(\sigma_t)_{t \in [0, T]}$ sont supposés adaptés uniformément bornés.

On introduit les processus $(\theta_t)_{t \in [0, T]}$ et $(L_t)_{t \in [0, T]}$ définis par

$$\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t) \quad \text{et} \quad L_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right). \quad (3.1)$$

Le processus $(L_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale et on définit la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$ de densité L_T par rapport à $\mathbf{P}$ i.e.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = L_T.$$

Par le théorème de Girsanov, sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, le processus $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$ défini par

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds \quad (3.2)$$

est un $\tilde{\mathbf{P}}$ -mouvement brownien standard. On réécrit la dynamique de $(X_t)_{t \in [0, T]}$ en fonction de $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$ et on obtient

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t dt + \sigma_t d\tilde{W}_t \quad \text{i.e.} \quad X_t = X_0 \exp \left(\int_0^t (r_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) ds + \int_0^t \sigma_s d\tilde{W}_s \right)$$

Le facteur d'actualisation se note β_t^{-1} , et sous la probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, l'actif actualisé $\tilde{X}_t = \beta_t^{-1} X_t$ est une $\tilde{\mathbf{P}}$ -martingale. En particulier on a

$$\frac{d\tilde{X}_t}{\tilde{X}_t} = \sigma_t d\tilde{W}_t \quad \text{et} \quad \tilde{X}_t = X_0 \exp \left(- \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s d\tilde{W}_s \right).$$

Dans ce marché (β, X) on appelle stratégie ou portefeuille un processus $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ adapté où

- ϕ_t^1 représente la quantité d'actif sans risque β à l'instant $t \in [0, T]$,
- ϕ_t^2 représente la quantité d'actif risqué X à l'instant $t \in [0, T]$.

La valeur du portefeuille est donnée par

$$\forall t \in [0, T], \quad V_t = \phi_t^1 \beta_t + \phi_t^2 X_t$$

Définition 3.1.1 (Stratégie auto-financée avec consommation) Une stratégie auto-financée avec consommation est un processus adapté $(\phi_t, C_t)_{t \in [0, T]}$ où $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ est une stratégie pour le marché (β, X) et $(C_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus croissant nul en 0 tels que

$$\int_0^T |\phi_t^1| dt + \int_0^T |\phi_t^2| dt < \infty \quad p.s.$$

et

$$\forall t \in [0, T], \quad V_t = V_0 + \int_0^t \phi_s^1 d\beta_s + \int_0^t \phi_s^2 dX_s - C_t. \quad (3.3)$$

De plus la stratégie est dite admissible si

$$\forall t \in [0, T], \quad V_t \geq 0. \quad (3.4)$$

Lemme 3.1.1 La condition d'auto-financement (3.3) est vérifié si et seulement si

$$\forall t \in [0, T], \quad \tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \phi_s^2 d\tilde{X}_s - \int_0^t \beta_s^{-1} dC_s, \quad (3.5)$$

où $\tilde{V}_t = \beta_t^{-1} V_t$ est la valeur actualisée du portefeuille à l'instant t .

PREUVE Appliquer la formule d'Itô à $\beta_t^{-1} V_t$. Puis vérifier l'autre sens en calculant $\beta_t \tilde{V}_t$. ■

Proposition 3.1.1 La valeur actualisée d'une stratégie admissible $(\tilde{V}_t)_{t \in [0, T]}$ est une $\tilde{\mathbf{P}}$ -surmartingale.

PREUVE D'après le Lemme précédent le processus $(M_t)_{t \in [0, T]}$ défini par

$$M_t = V_0 + \int_0^t \phi_s^2 \sigma_s \tilde{X}_s d\tilde{W}_s$$

est une $\tilde{\mathbf{P}}$ -martingale locale positive donc une surmartingale. ■

Définition 3.1.2 Une option américaine Z de fonction de payoff $\psi : [0, T] \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ et de maturité T est un processus $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ adapté et continu vérifiant

$$Z_t = \psi(t, X_t) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} Z_t \right] < \infty$$

L'instant d'exercice de cette option est un temps d'arrêt τ de $[0, T]$.

Un call américain a pour fonction de payoff $\psi(x) = (x - K)_+$ et un put américain $\psi(x) = (K - x)_+$. La valeur contractuelle $K \in \mathbf{R}_+$ est appelé strike ou prix d'exercice. On peut généraliser ces payoffs en considérant une fonction $K : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_+$ déterministe pour modéliser un strike de niveau variable.

Le prix d'une option américaine s'exprime à partir de l'enveloppe de Snell du processus $(\tilde{Z}_t)_{t \in [0, T]}$. Ce prix est obtenu par un raisonnement d'AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) dans le marché (β, X, Z) . Pour définir un arbitrage dans ce marché, on considère une stratégie associée à l'actif américain Z . Une stratégie "buy-and-hold" est un couple (k, τ) où k est une quantité réelle et τ un temps d'arrêt de $[0, T]$, qui s'interprète comme ceci :

- si $k > 0$ le portefeuille est composé de k quantité d'actif Z jusqu'en τ
- si $k < 0$ la position est short en k quantité d'actif Z jusqu'en τ .

On peut consulter [Myn92] pour plus d'informations sur ce sujet.

Définition 3.1.3 (Stratégie auto-financée dans (β, X, Z)) Une stratégie auto-financée dans (β, X, Z) est une collection (ϕ, C, k, τ) où (ϕ, C) est une stratégie auto-financée dans (β, X) et (k, τ) est une stratégie buy-and-hold pour Z , telle que

$$\forall t \in [\tau, T], \quad \phi_t^1 = \phi_\tau^1 + \phi_\tau^2 \beta_\tau^{-1} X_\tau + k \beta_\tau^{-1} \psi(\tau, X_\tau) \quad \text{et} \quad \phi_t^2 = 0. \quad (3.6)$$

De plus la stratégie est dite admissible si (β, X) est admissible et la consommation ne varie pas après τ (pour tout $t \in [\tau, T]$, $C_t = C_\tau$).

Définition 3.1.4 (Arbitrage dans (β, X, Z)) Un arbitrage est une stratégie admissible telle que

$$V_0 < 0 \quad \text{et} \quad V_T = \phi_T^1 \beta_T \geq 0. \quad (3.7)$$

Il existe un arbitrage

- long ($k \geq 0$) si il existe un temps d'arrêt τ et qu'il existe (ϕ, C) tels que (ϕ, C, k, τ) est une stratégie admissible vérifiant (3.7).
- short ($k \leq 0$) si pour tout temps d'arrêt τ , il existe (ϕ, C) tels que (ϕ, C, k, τ) est une stratégie admissible vérifiant (3.7).

Définition 3.1.5 (Stratégie de couverture) Une stratégie de couverture pour l'option américaine Z est une stratégie avec consommation (ϕ, C) admissible telle que la valeur V domine Z i.e. $V_t \geq Z_t$.

Proposition 3.1.2 Soit $\tilde{S}$ l'enveloppe de Snell sous $\tilde{\mathbf{P}}$ du processus $(\tilde{Z}_t)_{t \in [0, T]}$ et $S_t = \beta_t \tilde{S}_t$ i.e.

$$S_t = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t^T} \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_t^\tau r_s ds} Z_\tau \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.8)$$

Alors toute stratégie avec couverture de valeur V vérifie $V_t \geq S_t$ p.s. pour tout $t \in [0, T]$.

Théorème 3.1.1 (de réplcation) Il existe une stratégie avec consommation (ϕ, C) admissible de valeur V telle que $V_t = S_t$ p.s. pour tout $t \in [0, T]$.

PREUVE Décomposition de Doob-Meyer et théorème de representation des martingales. ■

Au passage on remarque que la consommation est nulle jusqu'en τ_0 ...

Théorème 3.1.2 Il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) dans le marché (β, X, Z) si et seulement le prix $\pi_0(Z)$ est donné par

$$\pi_0(Z) = S_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^T} \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_0^\tau r_s ds} Z_\tau \right].$$

PREUVE Supposons le prix $\pi_0(Z) > S_0$. On considère la stratégie avec consommation (φ, c) donnée par le Théorème 3.1.1 pour répliquer le processus $(S_t)_{t \in [0, T]}$. On construit une stratégie d'arbitrage (short) $(\phi, C, -1, \tau)$ de la façon suivante :

- τ un temps d'exercice
- $\phi_t^1 = \begin{cases} \varphi_t^1, & \text{pour } t \in [0, \tau], \\ \varphi_\tau^1 + \varphi_\tau^2 \beta_\tau^{-1} X_\tau - \beta_\tau^{-1} \psi(\tau, X_\tau) & \text{pour } t \in]\tau, T] \end{cases}$
- $\phi_t^2 = \varphi_t^2 \mathbf{1}_{\{[0, \tau]\}}(t)$
- $C_t = c_{t \wedge \tau}$

Alors par la propriété de couverture on a $S_\tau \geq \psi(\tau, X_\tau)$ p.s. et donc $\phi_T^1 \beta_T \geq 0$ p.s. La valeur initiale du portefeuille est $\phi_0^1 + \phi_0^2 X_0 - \pi_0(Z) = S_0 - \pi_0(Z) < 0$, d'où l'arbitrage (au profit du vendeur de l'option).

Supposons le prix $\pi_0(Z) < S_0$. Alors l'acheteur de l'option exerce à un temps optimal τ_0 pour lequel la consommation est nulle. Un arbitrage long $(\phi, C, 1, \tau)$ s'écrit :

- $\tau = \tau_0$
- $\phi_t^1 = \begin{cases} -\varphi_t^1, & \text{pour } t \in [0, \tau], \\ -\varphi_\tau^1 - \varphi_\tau^2 \beta_\tau^{-1} X_\tau + \beta_\tau^{-1} \psi(\tau, X_\tau) & \text{pour } t \in]\tau, T] \end{cases}$
- $\phi_t^2 = -\varphi_t^2 \mathbf{1}_{\{0, \tau\}}(t)$
- $C_t = 0$

Ainsi $S_\tau = \psi(\tau, X_\tau)$ p.s. et donc $\phi_T^1 \beta_T = 0$ p.s. et la valeur initiale du portefeuille est $-\phi_0^1 - \phi_0^2 X_0 + \pi_0(Z) = -S_0 + \pi_0(Z) > 0$. ■

Proposition 3.1.3 Si $r_t \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ alors pour tout $K > 0$

$$S_t = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t^T} \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_t^\tau r_s ds} (X_\tau - K)_+ \mid \mathcal{F}_t \right] = \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (X_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t \right],$$

i.e. T est un temps d'arrêt optimal pour le Call américain. Et le prix du Call américain est le même qu'un Call européen.

Cadre Markovien

On considère l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (3.9)$$

avec b et σ continues, Lipschitz en x uniformément en t . On a existence et unicité d'une solution forte et pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}$ on note $(X_s^{(t,x)})_{t \leq s \leq T}$ la solution issue de x en t i.e. $X_t^{(t,x)} = x$. Pour un point x fixé on note $X_t^x = X_t^{(0,x)}$.

Soit $r : [0, T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue une fonction de taux instantané. Le payoff actualisé d'une option américaine s'écrit alors

$$\tilde{Z}_t = \beta_t^{-1} \psi(t, X_t^x) = e^{-\int_0^t r(s, X_s^x) ds} \psi(t, X_t^x),$$

et l'enveloppe de Snell associée $\tilde{S}$ conduit à la représentation du prix S sous la forme

$$S_t = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t^T} \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_t^\tau r(s, X_s) ds} \psi(\tau, X_\tau) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Proposition 3.1.4 La fonction $V : [0, T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par

$$V(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t^T} \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_t^\tau r(s, X_s^{(t,x)}) ds} \psi(\tau, X_\tau^{(t,x)}) \right]$$

est continue et $S_t = V(t, X_t^x)$ (le processus $(\tilde{S}_t = \beta_t^{-1} V(t, X_t^x))_{t \in [0, T]}$ est l'enveloppe de Snell de $\tilde{Z}$). De plus, si b et σ ne dépendent pas du temps alors

$$V(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^{T-t}} \tilde{\mathbf{E}} \left[e^{-\int_0^\tau r(s, X_s^x) ds} \psi(\tau + t, X_\tau^x) \right]$$

À l'EDS (3.9) on associe l'opérateur différentiel $\mathcal{D}$ (appelé générateur infinitésimal ou opérateur de Dynkin) défini par

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + b(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

Soit V une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $[0, T] \times \mathbf{R}$. Alors la formule d'Itô donne

$$\beta_t^{-1} V(t, X_t) = V(0, X_0) + \int_0^t \beta_s^{-1} (\mathcal{D}V - rV)(s, X_s) ds + \int_0^t \beta_s^{-1} V'(s, X_s) \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Pour que le processus $(\beta_t^{-1} V(t, X_t^x))_{t \in [0, T]}$ soit l'enveloppe de Snell de $\tilde{Z}$ il est nécessaire que

- $\mathcal{D}V - rV \leq 0$ pour avoir la propriété de surmartingale
- $V \geq \psi$ pour dominer le processus Z
- $V(T, \cdot) = \psi(T, \cdot)$ pour vérifier la condition terminale
- $\mathcal{D}V - rV = 0$ sur $V > \psi$ pour vérifier la condition de martingalité dans la région de continuation

Ces conditions peuvent être synthétisées sous la forme d'une inéquation variationnelle de la forme

$$\begin{cases} \max(\mathcal{D}V - rV, \psi - V) = 0, \\ V(T, \cdot) = \psi(T, \cdot). \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2 Modèle de Black-Scholes

Dans le modèle de Black-Scholes on considère un unique actif risqué $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de forte l'EDS (sous la probabilité risque neutre que l'on note $\mathbf{P}$)

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

où $r \geq 0$ est le taux d'intérêt constant, σ la volatilité de l'actif risqué constante, et $(W_t)_{t \geq 0}$ un $\mathbf{P}$ mouvement brownien standard.

Pour cette section on peut consulter [LL97], [Shr04], [EK05] et [FS11].

3.2.1 Put à horizon infini

Le prix d'un Put américain à horizon infini (ou Put américain perpétuel) est donné par

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}_x [e^{-r\tau} (K - X_\tau)_+]. \quad (3.12)$$

Dans un premier temps, il semble naturel de considérer un temps d'arrêt optimal τ_{L^*} dans (3.12) de la forme : « on exerce le put dès que l'actif X_t est sous un niveau L^* ». On va chercher le niveau optimal L^* puis calculer la fonction valeur associée V_{L^*} . On vérifiera ensuite que cette fonction valeur V_{L^*} est solution de l'inéquation variationnelle (3.11) puis on prouvera dans le théorème 3.2.2 (dit de vérification) que ce temps d'arrêt τ_{L^*} est optimal dans la classe de tous les temps d'arrêts $\mathcal{T}_0$.

Tout d'abord on rappelle que le temps d'atteinte d'un mouvement brownien avec drift est donné par une loi inverse gaussienne.

Théorème 3.2.1 *Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $\nu \in \mathbf{R}$. Alors le temps d'atteinte de niveau $\alpha > 0$ pour $W_t^\nu = \nu t + W_t$, défini par*

$$\tau_\alpha = \inf \{t \geq 0, W_t^\nu = \alpha\}$$

est de loi inverse gaussienne $IG(\alpha/\nu, \alpha^2)$ i.e.

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}[\tau_\alpha \geq t] &= \mathcal{N}\left(\frac{\alpha - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu\alpha} \mathcal{N}\left(\frac{-\alpha - \nu t}{\sqrt{t}}\right), \\ \forall s > 0, \quad \mathbf{E}[e^{-s\tau_\alpha}] &= \exp\left(\alpha(\nu - \sqrt{\nu^2 + 2s})\right), \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$.

Construction de la fonction V_{L^*}

On considère un temps d'arrêt de la forme « on exerce le put dès que l'actif X_t est sous un niveau L » pour un niveau fixé $L \in]0, K[$. Si $x \leq L$ alors on exerce immédiatement (en 0) et le payoff est alors $K - x$. Si $x > L$ alors on exerce en le temps d'arrêt τ_L défini par

$$\tau_L = \inf \{t \geq 0, X_t = L\} = \inf \left\{ t \geq 0, x e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t} = L \right\} \quad (3.13)$$

et la valeur du put avec cette stratégie est alors

$$V_L(x) = (K - L)\mathbf{E}[e^{-r\tau_L}] \quad \text{si } x > L. \quad (3.14)$$

En considérant le brownien avec drift $W_t^\nu = \nu t - W_t$ avec $\nu = -\frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})$ on a

$$\tau_L = \inf \{t \geq 0, W_t^\nu = \alpha\} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{x}{L} \right) > 0, \quad (3.15)$$

et d'après le théorème précédent 3.2.1 on a

$$\mathbf{E}[e^{-r\tau_L}] = \exp \left(\alpha(\nu - \sqrt{\nu^2 + 2r}) \right) \quad \text{si } x > L$$

Or $\nu^2 + 2r = \frac{1}{\sigma^2} \left(r^2 + \frac{\sigma^4}{4} - 2r\frac{\sigma^2}{2} \right) + 2r = \frac{1}{\sigma^2} \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2$, donc $\nu - \sqrt{\nu^2 + 2r} = -\frac{2r}{\sigma}$ et

$$\mathbf{E}[e^{-r\tau_L}] = \left(\frac{x}{L} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \text{si } x > L$$

La fonction valeur d'un put américain perpétuel associé à la stratégie : « on exerce le put dès que l'actif X_t est sous un niveau L » pour un niveau fixé $L \in]0, K[$, est alors donnée par

$$V_L(x) = \begin{cases} K - x & \text{si } x \leq L \\ (K - L) \left(\frac{x}{L} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & \text{si } x > L \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour trouver le niveau L optimal il faut maximiser la fonction $L \mapsto V_L(x)$ pour x fixé. On considère alors la fonction

$$g : L \in [0, K] \mapsto (K - L)L^{\frac{2r}{\sigma^2}}.$$

On a $g(0) = g(K) = 0$ et g continue, strictement positive sur $]0, K[$ qui admet un maximum en

$$L^* = \frac{2r}{2r + \sigma^2} K \quad \text{avec} \quad g(L^*) = \frac{\sigma^2}{2r + \sigma^2} \left(\frac{2r}{2r + \sigma^2} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} K^{\frac{2r + \sigma^2}{\sigma^2}}. \quad (3.17)$$

La fonction valeur V_{L^*} associé au temps optimal τ_{L^*} (optimal dans la classe des temps d'arrêts considérés ici) est alors définie par

$$V_{L^*}(x) = \begin{cases} K - x & \text{si } x \leq L^* \\ (K - L^*) \left(\frac{x}{L^*} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & \text{si } x > L^* \end{cases} \quad (3.18)$$

Propriétés de la fonction V_{L^*}

La fonction valeur V_{L^*} est clairement continue sur $\mathbf{R}_+$ et régulière $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, L^*[\cup]L^*, +\infty[$. D'autre part on a

$$V'_{L^*}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x \leq L^* \\ -(K - L^*) \frac{2r}{\sigma^2 x} \left(\frac{x}{L^*} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & \text{si } x > L^* \end{cases}$$

avec $\lim_{x \rightarrow L^*, x > L^*} V'_{L^*}(x) = -\frac{2r}{\sigma^2 L^*} (K - L^*) = -1$, c'est à dire V_{L^*} dérivable en L^* . Cette propriété de régularité est importante et appelée *smooth fit* (ou *smooth pasting*). On vérifie aisément que cette propriété caractérise aussi L^* car c'est la seule valeur pour laquelle la fonction valeur V_L est $\mathcal{C}^1$. Notons que V_{L^*} n'est pas $\mathcal{C}^2$ en L^* mais on a

$$V''_{L^*}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L^* \\ (K - L^*) \frac{2r(2r + \sigma^2)}{\sigma^4 x^2} \left(\frac{x}{L^*} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & \text{si } x > L^* \end{cases}$$

Ainsi la fonction valeur V_{L^*} vérifie les propriétés suivantes :

- $V_{L^*}(x) \geq (K - x)_+$ pour tout $x \geq 0$,
- $V'_{L^*}(L^*) = -1$ propriété de smooth fit,
- V_{L^*} est $\mathcal{C}^2$ en dehors de L^* et convexe sur $\mathbf{R}_+$,
- $\mathcal{D}V_{L^*} - rV_{L^*} = 0$ sur $x > L^*$ (propriété de martingale dans la région de continuation),
- $\mathcal{D}V_{L^*} - rV_{L^*} = -rK \leq 0$ sur $x < L^*$ (propriété de surmartingale).

De plus, on peut caractériser le point L^* comme le point de décollement (régulier) de la fonction valeur par rapport au payoff :

$$L^* = \inf \{x \in \mathbf{R}_+, V(x) > (K - x)_+\}. \quad (3.19)$$

Cette valeur L^* est appelée prix critique du put perpétuel.

Théorème 3.2.2 (de vérification) *La fonction V valeur du Put américain perpétuel (3.12) est donnée explicitement par la fonction V_{L^*} définie en (3.18). Le temps d'arrêt τ_{L^*} avec L^* défini en (3.17) est optimal pour le problème (3.12).*

PREUVE Soit $t \in]0, T[$. La formule d'Itô appliqué à $e^{-rt}V(X_t)$ donne

$$e^{-rt}V_{L^*}(X_t) = V_{L^*}(x) + \int_0^t e^{-ru}\sigma X_u V'_{L^*}(X_u)dW_u + \int_0^t e^{-ru}(\mathcal{D}V_{L^*} - rV_{L^*})(X_u)\mathbf{1}_{\{X_u \neq L^*\}}du. \quad (3.20)$$

Comme $\mathcal{D}V_{L^*} - rV_{L^*} \leq 0$ et $\mathbf{P}[X_u = L^*] = 0$ pour tout u on a

$$e^{-rt}V_{L^*}(X_t) \leq V_{L^*}(x) + M_t,$$

où $(M_t)_{t \geq 0}$ est la martingale locale continue définie par

$$M_t = \int_0^t e^{-ru}\sigma X_u V'_{L^*}(X_u)dW_u. \quad (3.21)$$

Pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_0$, on a

$$e^{-r(\tau \wedge n)}(K - X_{\tau \wedge n})_+ \leq e^{-r(\tau \wedge n)}V_{L^*}(x_{\tau \wedge n}) \leq V_{L^*}(x) + M_{\tau \wedge n}.$$

En prenant l'espérance et en faisant tendre $n \rightarrow \infty$ on obtient par Fatou (ou convergence dominée)

$$\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - X_\tau)_+] \leq V_{L^*}(x)$$

et en prenant le sup sur tous les temps d'arrêts $\tau \in \mathcal{T}_0$ on conclut que $V \leq V_{L^*}$.

Pour prouver l'inégalité inverse on utilise (3.20) avec $\mathcal{D}V_{L^*} - rV_{L^*} = 0$ sur $x > L^*$ ce qui donne

$$e^{-r\tau_{L^*}}V_{L^*}(X_{\tau_{L^*}}) = V_{L^*}(x) + \int_0^{\tau_{L^*}} e^{-ru}\sigma X_u V'_{L^*}(X_u)dW_u. \quad (3.22)$$

En localisant la martingale et en utilisant $V_{L^*}(X_{\tau_{L^*}}) = (K - X_{\tau_{L^*}})_+$ on obtient par convergence dominée

$$\mathbf{E}[e^{-r\tau_{L^*}}(K - X_{\tau_{L^*}})_+] = V_{L^*}(x).$$

Ainsi τ_{L^*} est optimal et $V_{L^*} = V$. ■

3.2.2 Put à horizon fini

On considère le problème du put américain d'horizon T dont la fonction valeur est donnée par

$$V(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^{T-t}} \mathbf{E}\left[e^{-r\tau}(K - X_\tau)_+\right] \quad (3.23)$$

A partir de maintenant on note V_∞ la fonction valeur du put américain perpétuel et L_∞^* le niveau optimal associé défini dans (3.17). Alors il est clair que $V(t, x) \leq V_\infty(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Proposition 3.2.1 *La fonction de prix V définie en (3.23) vérifie les propriétés suivantes*

1. $V(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^1} \mathbf{E} \left[e^{-r(T-t)\tau} \left(K - x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} \right)_+ \right],$
2. $\forall 0 \leq s < t \leq T, \forall x > 0, \exists C > 0, \quad 0 \leq V(s, x) - V(t, x) \leq C(\sqrt{T-t} - \sqrt{T-s}),$
3. $\forall 0 \leq t \leq T, \forall 0 < x < y \leq K, \quad 0 \leq V(t, x) - V(t, y) \leq (y - x).$

On déduit aisément des propriétés 2. et 3. que la fonction valeur V est continue sur $[0, T] \times \mathbf{R}_+$.

PREUVE On prouve 1. en utilisant la propriété de scaling du mouvement brownien *i.e.* $(W_{s(T-t)})_{0 \leq s \leq 1}$ a même loi que $(\sqrt{T-t}W_s)_{0 \leq s \leq 1}$.

Soit $x > 0$ et $0 \leq s < t \leq T$. Pour prouver 2. on a par décroissance (évidente) de la fonction $t \mapsto V(t, x)$ que $V(s, x) - V(t, x) \geq 0$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} V(s, x) - V(t, x) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^1} \mathbf{E} \left[e^{-r(T-s)\tau} \left(K - x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-s)\tau + \sigma\sqrt{T-s}W_\tau} \right)_+ \right. \\ &\quad \left. - e^{-r(T-t)\tau} \left(K - x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} \right)_+ \right] \end{aligned}$$

En utilisant $e^{-r(T-s)\tau} \leq e^{-r(T-t)\tau} \leq 1$ et $(K - y)_+ - (K - z)_+ \leq (z - y)_+$ pour tout $y, z \in \mathbf{R}$ on obtient

$$\begin{aligned} V(s, x) - V(t, x) &\leq x \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^1} \mathbf{E} \left[\left(e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} - e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-s)\tau + \sigma\sqrt{T-s}W_\tau} \right)_+ \right] \\ &\leq x \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^1} \mathbf{E} \left[e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} \left(1 - e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(t-s)\tau + \sigma\sqrt{t-s}W_\tau} \right)_+ \right] \\ &\leq x \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^1} \mathbf{E} \left[e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} \left((r - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)\tau + \sigma(\sqrt{T-t} - \sqrt{T-s})W_\tau \right)_- \right], \end{aligned}$$

(car $(1 - e^x)_+ \leq x_- = \max(0, -x)$) d'où le résultat.

Le point 3. se prouve de façon similaire. Soit $t \in [0, T]$ et $0 < x < y \leq K$. Alors il est clair que $V(t, x) - V(t, y) \geq 0$ et comme $(K - y)_+ - (K - z)_+ \leq (z - y)_+$

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(t, y) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0^1} \mathbf{E} \left[e^{-r(T-t)\tau} \left((y - x) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} \right) \right] \\ &\leq (y - x), \end{aligned}$$

$$\text{car } \mathbf{E} \left[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\tau + \sigma\sqrt{T-t}W_\tau} \right] = 1. \quad \blacksquare$$

On définit la région de continuation

$$C = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_+^*, V(t, x) > (K - x)_+\},$$

et la région d'arrêt

$$D = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_+^*, V(t, x) = (K - x)_+\}.$$

De façon similaire à (3.19) on définit pour tout $t \in [0, T]$ le point de décollement

$$L^*(t) = \inf \{x \in \mathbf{R}_+, V(t, x) > (K - x)_+\}. \quad (3.24)$$

La valeur $L^*(t)$ est appelée *prix critique* en t . Il est clair que la fonction L^* est positive, croissante, que $L^*(t) < K$ avec $\lim_{t \rightarrow T} L^*(t) = K$. De plus, comme $V(t, x) \leq V_\infty(x)$ on a $L^*(t) \geq L_\infty^*$ (prix critique

du put perpétuel (3.19)). Il est important de noter que la fonction $t \rightarrow L^*(t)$ définit une frontière au sens où

$$C = \{(t, x) \in [0, T[\times \mathbf{R}_+^*, x > L^*(t)\}, \\ \text{et } D = \{(t, x) \in [0, T[\times \mathbf{R}_+^*, x \leq L^*(t)\} \cup \{(T, K)\}.$$

En effet, si $x \leq L^*(t)$ alors $V(t, x) \leq (K - x)_+$ or on sait que V vérifie $V(t, x) \geq (K - x)_+$ pour tout (t, x) et donc si $x \leq L^*(t)$ alors $V(t, x) = (K - x)_+$. D'autre part, par continuité de la fonction V on a $V(t, L^*(t)) = (K - L^*(t))$ pour tout $t \in [0, T[$. Supposons qu'il existe $a \in]L^*(t), K[$ tel que $V(t, a) = K - a$. Alors comme $x \mapsto V(t, x)$ est convexe et que $V(t, x) \geq K - x$ on en déduit que $V(t, x) = K - x$ pour tout $x \in]L^*(t), a[$ ce qui contredit la définition de $L^*(t)$.

Proposition 3.2.2 *Pour tout $t \in]0, T[$, la fonction $x \mapsto V(t, x)$ vérifie la condition de smooth fit, c'est à dire est $\mathcal{C}^1$ en $L^*(t)$.*

PREUVE Soit $x = L^*(t)$ alors $x < K$ et $(t, x) \in D$. Tout d'abord il est clair que $\frac{\partial^- V(t, x)}{\partial x} = -1$. D'autre part on considère $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < K$ et on a

$$\frac{V(t, x + \varepsilon) - V(t, x)}{\varepsilon} \geq \frac{(K - (x + \varepsilon))_+ - (K - x)_+}{\varepsilon} = -1,$$

d'où en prenant la limite en ε vers 0 on obtient $\frac{\partial^+ V}{\partial x}(t, x) \geq -1$.

ATTENTION. En utilisant la propriété 3. de la proposition 3.2.1 on a aussi

$$\frac{V(t, x + \varepsilon) - V(t, x)}{\varepsilon} \geq -1,$$

et donc $\frac{\partial^+ V}{\partial x}(t, x) \geq -1$... pour obtenir l'inégalité inverse il faut raffiner un peu la propriété 3. Soit $t \in [0, T]$ fixé et $0 < x < y < K$. On pose $M_s = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)s + \sigma\sqrt{T-t}W_s}$ et $\tau_y \in \mathcal{T}_0^1$ qui réalise le sup dans $V(t, y)$. Alors

$$\begin{aligned} V(t, y) - V(t, x) &\leq \mathbf{E} \left[e^{-r(T-t)\tau_y} \left((K - yX_{\tau_y}^1)_+ - (K - xX_{\tau_y}^1)_+ \right) \right], \\ &\leq \mathbf{E} \left[e^{-r(T-t)\tau_y} \left((K - yX_{\tau_y}^1)_+ - (K - xX_{\tau_y}^1)_+ \right) \mathbf{1}_{\{yX_{\tau_y}^1 < K\}} \right], \\ &\leq (x - y) \mathbf{E} \left[M_{\tau_y} \mathbf{1}_{\{yX_{\tau_y}^1 < K\}} \right]. \end{aligned}$$

On applique donc ce résultat avec $y = x + \varepsilon < K$ et on prouve que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_{x+\varepsilon} = \tau_x = 0$ (car $x = L^*(t)$) ce qui implique $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_{\tau_{x+\varepsilon}} \mathbf{1}_{\{(x+\varepsilon)X_{\tau_{x+\varepsilon}}^1 < K\}} = 1$ p.s. et par suite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(t, x + \varepsilon) - V(t, x)}{\varepsilon} \leq -1. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.2.3 (prime d'exercice anticipé) *Soit $V_e(t, x) = \mathbf{E} \left[e^{-r(T-t)} (K - X_T^{(t, x)})_+ \right]$ la fonction de prix du put européen (de maturité T et strike K). Alors on a*

$$V(t, x) = V_e(t, x) + \int_0^{T-t} rK e^{-ru} \mathbf{P} \left[X_u^{(t, x)} \leq L^*(t + u) \right] du, \quad (3.25)$$

$$= V_e(t, x) + \int_0^{T-t} rK e^{-ru} \mathcal{N}(d(x, t, u)) du, \quad (3.26)$$

avec $d(x, t, u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{u}} \left(\log(L^*(t + u)/x) - (r - \frac{\sigma^2}{2})u \right)$.

PREUVE On prouve le cas $t = 0$. On sait que dans la région de continuation C la fonction V vérifie

$$\mathcal{D}V - rV = 0 \quad \text{sur } C = \{(t, x), x > L^*(t)\}$$

et sur la région d'arrêt D , $V(t, x) = (K - x)_+$. Soit $t \in]0, T[$ fixé. Par la condition de smooth fit on sait que $x \mapsto V(t, x)$ est $\mathcal{C}^1$ et par la formule d'Itô on a

$$e^{-rt}V(t, X_t^x) = V(0, x) + \int_0^t e^{-ru} \sigma X_u^x \frac{\partial V}{\partial x}(u, X_u^x) dW_u + \int_0^t e^{-ru} (\mathcal{D}V - rV)(u, X_u^x) \mathbf{1}_{\{X_u^x \leq L^*(u)\}} du.$$

Dans la région d'arrêt $D = \{(t, x), x \leq L^*(t)\}$ on a $V(t, x) = (K - x)_+$ donc $\mathcal{D}V - rV = -rK$ donc

$$e^{-rt}V(t, X_t^x) = V(0, x) + \int_0^t e^{-ru} \sigma X_u^x \frac{\partial V}{\partial x}(u, X_u^x) dW_u - rK \int_0^t e^{-ru} \mathbf{1}_{\{X_u^x \leq L^*(u)\}} du. \quad (3.27)$$

Cette expression fournit une formulation explicite de la décomposition de Doob-Meyer de la surmartingale $(e^{-rt}V(t, X_t^x))_{0 \leq t \leq T}$.

En faisant tendre $t \rightarrow T$ et en prenant l'espérance on obtient de (3.27) la relation

$$\mathbf{E} \left[e^{-rT} V(T, X_T^x) \right] = V(0, x) - rK \int_0^T e^{-ru} \mathbf{P} [X_u^x \leq L^*(u)] du,$$

d'où le résultat (3.25) en $t = 0$ en notant que $V(T, x) = (K - x)_+$.

On obtient la formule (3.26) (pour $t = 0$) en utilisant le fait que X_u^x est une loi log-normale et donc que

$$\mathbf{P} [X_u^x \leq L^*(u)] = \mathbf{P} [G \leq d(x, u)] \quad \text{avec} \quad d(x, u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{u}} \left(\log(L^*(u)/x) - (r - \frac{\sigma^2}{2})u \right),$$

où $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ■

Si on applique le résultat (3.26) en un point $(t, x) = (t, L^*(t))$ de la région d'arrêt on obtient

$$K - L^*(t) = V_e(t, L^*(t)) + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} d(L^*(t), t, u) du \quad (3.28)$$

ce qui caractérise la frontière $t \rightarrow L^*(t)$ comme solution de l'équation (3.28) appelée équation de la frontière libre (équation non linéaire de Volterra du second type). On a le théorème suivant (qui est admis, cf [PS06] Theorem 25.3 p.386).

Théorème 3.2.3 *La frontière optimal dans le problème du put américain est l'unique solution de l'équation de la frontière libre (3.28) dans la classe des fonctions $L : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ continues croissantes telles que $0 < L(t) < K$ pour tout $0 < t < T$.*

Bibliographie

- [EK05] Robert J. Elliott and P. Ekkehard Kopp. *Mathematics of financial markets*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, second edition, 2005.
- [FS11] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic finance*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended edition, 2011. An introduction in discrete time.
- [HK04] Martin B Haugh and Leonid Kogan. Pricing american options : a duality approach. *Operations Research*, 52(2) :258–270, 2004.
- [Lam09] Damien Lamberton. Optimal stopping and american options. *Ljubljana Summer School on Financial Mathematics*, 2009.
- [LL97] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, Édition Marketing, Paris, second edition, 1997.
- [Myn92] Ravi Myneni. The pricing of the american option. *The Annals of Applied Probability*, pages 1–23, 1992.
- [PS06] Goran Peskir and Albert Shiryaev. *Optimal stopping and free-boundary problems*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [Rog02] L. Chris G. Rogers. Monte carlo valuation of american options. *Mathematical Finance*, 12(3) :271–286, 2002.
- [RW00a] L. C. G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.
- [RW00b] L. C. G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition.
- [Shr04] Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004. Continuous-time models.