

Arrêt optimal et contrôle stochastique
Examen du 9 mai 2025

Exercice 1 (Arrêt optimal):

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une filtration à temps discret $(\mathcal{F}_n)_{n=0, \dots, N}$. Sur cet espace filtré on considère une chaîne de Markov inhomogène $(X_n)_{n=0, \dots, N}$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^d$ (d grand) de condition initiale déterministe $X_0 = x_0 \in \mathbf{R}_+^d$, et de noyau de transition défini à l'instant $n = 1, \dots, N$ par $P_n(x, A) = \mathbf{P}[X_n \in A | X_{n-1} = x]$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. On suppose que $(X_n)_{n=0, \dots, N}$ est une martingale sous $\mathbf{P}$ et on considère un produit dérivé américain $(Z_n = \varphi_n(X_n))_{n=0, \dots, N}$ que l'on peut exercer à toute date n . On suppose $\varphi_n : \mathbf{R}_+^d \rightarrow [0, K]$ (K constante déterministe) c'est à dire $Z_n \in [0, K]$.

Soit $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeur dans $\{0, \dots, N\}$. On veut résoudre $V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Z_\tau]$ et déterminer τ^* qui réalise ce supremum.

1. Donner la relation de récurrence rétrograde sur la suite des fonctions valeurs $(V_n)_{n=0, \dots, N}$ qui permettent de calculer (théoriquement) le point $V_0(x_0) = V_0$. Cette relation fait intervenir le noyau de transition de la chaîne $(X_n)_{n=0, \dots, N}$.

On introduit le processus $(S_n)_{n=0, \dots, N}$ défini par $S_n = V_n(X_n)$ et le temps d'arrêt $\tau_n = \min\{k \geq n, S_k = \varphi_k(X_k)\}$.

2. Que peut-on dire du processus $(S_n)_{n=0, \dots, N}$?
3. On définit la fonction de continuation en $n = N$ par $C_N = 0$, et en $n = 0, \dots, N - 1$ par $C_n(x) = P_{n+1}V_{n+1}(x)$. Donner l'argument qui permet de justifier la représentation

$$C_n(x) = \mathbf{E}[Z_{\tau_{n+1}} | X_n = x].$$

4. En déduire que les variables aléatoires $(\tau_n)_{n=0, \dots, N}$ vérifient la relation de récurrence

$$\begin{cases} \tau_N = N, \\ \tau_n = nB_n + \tau_{n+1}(1 - B_n) \quad n = N - 1, \dots, 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad B_n = \mathbf{1}_{Z_n \geq \mathbf{E}[Z_{\tau_{n+1}} | X_n]},$$

et que $V_0(x_0) = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}] = \max(\varphi_0(x_0), \mathbf{E}[Z_{\tau_1}])$.

5. Ecrire précisément l'algorithme de Longstaff-Schwartz vu en cours pour construire une approximation des temps d'arrêts $\tau_n^{(j)}$, $1 \leq j \leq M$ à partir d'un jeu de trajectoires $(X_n^{(j)})_{n \in \{0, \dots, N\}}$, $1 \leq j \leq M$. En déduire un estimateur de V_0 et discuter sur les erreurs en jeu.

Exercice 2 (Arbitrage épargne/consommation):

On considère donc le modèle markovien contrôlé suivant : $X_0 = x_0 > 0$ et

$$X_{n+1} = X_n + Y_n X_n (1 - U_n), \quad n \geq 1,$$

où $U_n \in [0, 1]$. Les Y_n , $n \geq 1$, forment une suite de variables aléatoires IID à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et d'espérance finie notée θ . Le processus $(X_n)_n$ représente l'évolution, au cours du temps, d'une certaine fortune, et $U_n X_n$ représente la somme dépensée à l'instant n .

On cherche à optimiser la somme dépensée : on désire donc maximiser

$$\mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k U_k \right].$$

1. Définir le modèle markovien contrôlé sous-jacent.
2. Donner la fonction J_N et écrire les équations de programmation dynamique reliant J_n et J_{n+1} .
3. Montrer qu'il existe des réels $\rho_N, \dots, \rho_0$ tels que pour tout $n = N, \dots, 0$, pour tout $x \geq 0$,

$$J_n(x) = \rho_n x.$$

Donner la relation de récurrence satisfaite par les ρ_n ainsi que les valeurs des contrôles optimaux.

4. Montrer qu'il existe une unique $K \in \{0, \dots, N\}$ tel que les contrôles optimaux sont donnés par pour tout $n < K$,

$$U_n = 0 \text{ si } n < K \text{ et } U_n = 1 \text{ si } n \geq K.$$

Interpréter.